Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 12. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Betrachte die Menge M aller multilinearen Abbildungen $f : V^n \longrightarrow K$. Definiere geeignete Operationen, welche M zu einem K-Vektorraum machen.

Aufgabe 2. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Sei weiterhin $\mathcal{B}_V$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W$ eine Basis von W, sodass

$$M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(f))$ des Bildes von f.

Aufgabe 3. (a) Bestimme alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3. Welche sind abelsch?

(b) Bestimme alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_4. Welche sind abelsch?

Aufgabe 4. Berechne das Signum der folgenden Permutationen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$.

Aufgabe 5. Betrachte folgende reelle Matrix bzw. Vektoren,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in M(4 \times 5, \mathbb{R}), \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad b' := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimme alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $GS(A|0)$.

(b) Bestimme alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $GS(A|b)$.

(c) Bestimme alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $GS(A|b')$.

(d) Betrachte die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}),$$

und bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems $GS(CA|0)$.

(e) Betrachte die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R}),$$

und bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems $GS(AC|0)$.