Minisymposium 11

Geometrische Analysis

Leiter des Symposiums:

Prof. Dr. Ulrich Dierkes
Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fachbereich Mathematik
47048 Duisburg, Germany

Prof. Dr. Karsten Große-Brauckmann
Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik, AG 3
Schlossgartenstr. 7
64289 Darmstadt, Germany

Montag, 18. September
HS III, Hauptgebäude, Regina-Pacis-Weg

14:00 – 14:50 **Sven Winklmann** *(Pisa)*
Curvature estimates for graphs with prescribed mean curvature and flat normal bundle

---

15:00 – 15:20 **Matthias Bergner** *(Darmstadt)*
Minimizers of generalized nonparametric area functional

15:30 – 15:50 **Steffen Fröhlich** *(Darmstadt)*
On two-dimensional immersions of prescribed mean curvature in R^n

---

16:00 – 16:50 **Heiko von der Mosel** *(Aachen)*
A fully nonlinear elliptic boundary value problem arising in conformal geometry on hyperbolic space

---

Dienstag, 19. September
Hörsaal 118, AVZ I, Endenicher Allee 11-13

15:00 – 15:50 **Ruben Jakob** *(ETH Zürich)*
Endlichkeit der Lösungsmenge des Plateauschen Problems bei polygonalen Randkurven

---

16:00 – 16:20 **Michael Pingen** *(Duisburg-Essen)*
A-priori Abschätzungen harmonischer Abbildungen

16:30 – 16:50 **Christoph Scheven** *(Düsseldorf)*
Regularitätstheorie für stationäre harmonische Abbildungen mit allgemeinen Randbedingungen

---

17:00 – 17:50 **Andreas Gastel** *(Düsseldorf)*
Über extrinisch polyharmonische Abbildungen und ihren Wärmefluss

---

Mittwoch, 20. September

Hörsaal 118, AVZ I, Endenicher Allee 11-13

15:00 – 15:50 **Simon Blatt** *(Aachen)*
Chord-Arc Submanifolds of Arbitrary Codimension

16:00 – 16:20 **Philipp Reiter** *(Aachen)*
Does finite knot energy imply differentiability?

16:30 – 16:50 **Jens Dittrich** *(Ulm)*
A-priori Abschätzungen für konjugiert-konforme Abbildungen im Rahmen des Weylschen Einbettungsproblems

---

17:00 – 17:50 **Frank Müller** *(Cottbus)*
On the reularity of surfaces with prescribed mean curvature and partially free boundaries

---

17:00 – 17:50 **Tobias Lamm** *(ETH Zürich)*
Conservation laws for fourth order systems in four dimensions

---

Vortragsauszüge

Sven Winklmann *(Pisa)*
Curvature estimates for graphs with prescribed mean curvature and flat normal bundle

We consider graphs $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$ with prescribed mean curvature and flat normal bundle. Using techniques of Schoen-Simon-Yau and Ecker-Huisken, we derive the interior curvature estimate

$$\sup_{\Sigma\cap B_R} |A|^2 \leq \frac{C}{R^2}$$

up to dimension $n \leq 5$, where C is a constant depending on natural geometric data of Σ only. This generalizes previous results of Smoczyk-Wang-Xin and Wang for minimal graphs with flat normal bundle.

Joint work with Steffen Fröhlich.

Matthias Bergner *(Darmstadt)*
Minimizers of generalized nonparametric area functional

We consider the generalized nonparametric area functional

$$A(\zeta) := \int_\Omega \Big(a(x,y,\zeta)\sqrt{1+|\nabla\zeta|^2} + b(x,y,\zeta)\Big)dxdy$$

for functions $a, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ with $a > 0$. The Euler equation leads to a Dirichlet problem for graphs of prescribed mean curvature, where the mean curvature function depends on both the point in space as well as on the normal of the surface. Under certain assumptions on a and b we will solve the Dirichlet problem and thus construct minimizers of the functional A.

Steffen Fröhlich *(Darmstadt)*
On two-dimensional immersions of prescribed mean curvature in R^n

Using methods of Erhard Heinz and Friedrich Sauvigny for nonlinear elliptic systems in two variables we establish an estimate of the principal curvatures of two-dimensional graphs with prescribed mean curvature in Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Heiko von der Mosel *(Aachen)*
A fully nonlinear elliptic boundary value problem arising in conformal geometry on hyperbolic space

joint work with W. Reichel

For an n-dimensional Riemannian manifold (M, g) with metric g, Ricci tensor Ric, and scalar curvature R, let

$$A := \frac{1}{n-2}\left[Ric - \frac{R}{2(n-1)}g\right], \quad n \geq 3,$$

be the *Schouten tensor*, which contains the relevant information of the Riemannian curvature tensor under conformal deformation. An important class of problems in conformal geometry consists in finding a metric $h := e^{2u}g$ conformal to the background metric g such that the Schouten tensor A_h associated to h has special properties, e.g.

$$\sigma_k(A_h) = f \tag{2}$$

for a given function $f > 0$, where $\sigma_k(A_h)$ denotes the k-th elementary symmetric function of the eigenvalues of A_h. For $k = 1$ one has $\sigma_1(A_h) = \text{trace}(A_h)$, and (2) is the *Yamabe equation*, for $k = n$ one obtains with $\sigma_n(A_h) = \det A_h$ an equation of Monge-Ampére-type. The study of the geometrically particularly interesting situation $k = 2$ in dimenstion $n = 4$ has seen major advances by recent works of A. Chang, M. Gursky, J. Viaclovsky and many others, in the context of compact manifolds.
In contrast to that we consider here equation (2) for $k = 2$ on hyperbolic 4-space modelled as the conformal ball with the standard hyperbolic metric, and prove the existence of solutions to this fully nonlinear elliptic equation with the desired blow-up behaviour near the boundary.

Ruben Jakob *(ETH Zürich)*
Endlichkeit der Lösungsmenge des Plateauschen Problems bei polygonalen Randkurven

Im Jahre 1978 formulierte Nitsche das folgende Problem:

Man beweise, dass ein einfaches, geschlossenes Polygon nur endlich viele Lösungen des Plateauschen Problems berandet. Der Autor konnte zunächst das folgende Teilresultat beweisen:

Theorem 1. *Ein einfaches geschlossenes extremes Polygon $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ kann nur endlich viele immergierte stabile Minimalflächen beranden.*

Anschließend konnte der Autor dieses Resultat verallgemeinern zu

Theorem 2. *Sei $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiges extremes einfaches geschlossenes Polygon, an dessen Ecken die Winkel von $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind. Dann existiert eine Umgebung O von Γ^* in $\mathbb{R}^3$ und eine Zahl β, abhängig von Γ^*, so dass die Anzahl der immergierten stabilen Minimalflächen, welche von einem beliebigen einfachen geschlossenen Polygon innerhalb O berandet werden, durch β beschränkt ist.*

Hierbei heiße das Polygon Γ extrem, falls es auf dem Rand einer beschränkten, konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ liege und nicht in einer Ebene enthalten ist. Desweiteren heiße eine Minimalfläche X (vom Typ der Kreisscheibe $B := B_1(0)$) strikt verzweigungspunktfrei, falls $\inf_B \mid DX \mid > 0$ erfüllt ist. Sie heiße zusätzlich stabil, falls die zweite Variation $\delta^2\mathcal{A}(X, \varphi\xi) := \frac{d2}{d\epsilon^2}\mathcal{A}(X + \epsilon\varphi\xi) \mid_{\epsilon=0}$ des Flächeninhalts $\mathcal{A}$ von X in Normalenrichtung $\xi := \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ für kein $\varphi \in C_c^\infty(B)$ einen negativen Wert annimmt.

Michael Pingen *(Duisburg-Essen)*

A-priori Abschätzungen harmonischer Abbildungen

Im Vortrag wird ein neuer Beweis der a-priori Abschätzungen für schwache harmonische Abbildungen von Giaquinta-Hildebrandt [2] vorgestellt. Dieser Beweis verwendet Ideen aus einer Arbeit von Caffarelli [1], in der Hölderstetigkeit von beschränkten, schwachen Lösungen gewisser elliptischer Systeme gezeigt wurde. Wichtigstes Hilfsmittel ist eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen, die auf geeignete Translationen der harmonischen Abbildung in lokalen Koordinaten angewendet wird. Durch Iteration folgt dann die Stetigkeit und später die Hölderstetigkeit der harmonsichen Abbildung.

[1] Caffarelli, L.A., *Regularity Theorems for weak solutions of some nonlinear systems*, Comm. Pure Appl. Math. **35**, 1982, p.833-838

[2] Giaquinta, M. und Hildebrandt, S., *A priori estimates for harmonic mappings*, Journal Reine Angew. Mathematik **336**, 1982, p.124-164

Christoph Scheven *(Düsseldorf)*

Regularitätstheorie für stationäre harmonische Abbildungen mit allgemeinen Randbedingungen

Die Regularitätstheorie für harmonische Abbildungen $u \in W^{1,2}(M, N)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N, d.h. für stationäre Punkte des Energiefunktionals $E(u) = \int_M |Du|^2\,dx$, hat sich in den letzten Jahrzehnten zu einer gut verstandenen Theorie entwickelt. Regularitätsaussagen am Rand des Definitionsbereiches waren bisher allerdings in voller Allgemeinheit nur für Energieminimierer bekannt. Der Vortrag dagegen stellt eine Regularitätstheorie vor, die nur Voraussetzungen an die erste Variation der Energie stellt. Die behandelten Randbedingungen umfassen unter anderem die freie Randbedingung $u(\partial M) \subset \Gamma$ für eine vorgegebene Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset N$ sowie die Dirichlet-Randbedingung $u|_{\partial M} = g|_{\partial M}$ für eine gegebene Abbildung $g \in C^2(\partial M, N)$. Die Ähnlichkeit der Beweismethoden bei diesen beiden Typen von Randbedingungen legt nahe, beide als Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Randbedingungen zu betrachten, unter welchen alle Regularitätsaussagen in ähnlicher Form gelten.

Andreas Gastel *(Düsseldorf)*

Über extrinisch polyharmonische Abbildungen und ihren Wärmefluss

Extrinsisch polyharmonische Abbildungen $u : M \to N \subset \mathbb{R}^n$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N sind die kritischen Punkte der Poly-Energie $E_m(u) := \frac{1}{2}\int_M |D^m u|^2 \, dx$. Sie lösen ein partielles Differentialgleichungssystem der Ordnung $2m$ mit kritischen Nichtlinearitäten. Während Existenz schwacher Lösungen leicht zu sehen ist, ist über Regularität schwacher oder Existenz klassischer Lösungen noch relativ wenig bekannt. Analog zum harmonischen [Struwe] und biharmonischen Fall [Lamm] funktioniert der Wärmeleitungs-Zugang recht gut für die konforme Dimension $\dim M = 2m$ und alle kleineren. Wir diskutieren diesen Zugang sowie einige Implikationen für die Existenz und Regularität polyharmonischer Abbildungen.

Simon Blatt *(Aachen)*

Chord-Arc Submanifolds of Arbitrary Codimension

A rectifiable Jordan curve Γ that goes through ∞ is called a *chord-arc curve with constant κ*, iff

$$|s - t| \leq (1 + \kappa)|z(s) - z(t)|$$

for all $s, t \in \mathbb{R}$, where $z(.)$ denotes an arc length parametrization of Γ.
In [1,2,3] S. Semmes introduces several different analogs to the chord-arc constant for hypersurfaces of Euclidean spaces. Among other things he proves that each of these constants is small, if one of them is small, and moreover he shows that surfaces with a small chord-arc constant are homeomorphic to a hyperplane.
We extend the notion of chord-arc surfaces and constants to submanifolds of arbitrary codimension. Following ideas of Semmes one can show that they contain big pieces of

Lipschitz graphs, if the chord-arc constant is sufficiently small. Using this and a smoothing argument, we are able to show that n-dimensional submanifolds with small chord-arc constants are not only homeomorphic to Euclidean n-space, but even unknotted.

References:

[1] Stephen Semmes. Chord-Arc with small constant. I. *Adv. Math.*, 85(2), 198-223, 1991

[2] Stephen Semmes. Chord-Arc with small constant. II. Good parametrizations. *Adv.Math.*, 88(2), 170-199, 1991[1.7mm]

[3] Stephen Semmes. Hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ whose unit normal has small BMO norm. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 112(2), 403-412, 1991

Philipp Reiter *(Aachen)*

Does finite knot energy imply differentiability?

In 1991/92 J. O'Hara [1] introduced the family of (j,p)-knot functionals

$$E^{j,p}(\gamma) := \mathscr{L}(\gamma)^{jp-2} \iint\limits_{(\mathbb{R}/(\ell\mathbb{Z}))^2} \left(\frac{1}{|\gamma(s)-\gamma(t)|^j} - \frac{1}{D_\gamma(s,t)^j} \right)^p |\dot\gamma(s)|\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

where $\gamma \in C^{0,1}(\mathbb{R}/(\ell\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)$ is a curve of length $\mathscr{L}(\gamma)$, the term $D_\gamma(s,t)$ denotes the distance of $\gamma(s)$ and $\gamma(t)$ on γ, and $j,p>0$. The general idea is to produce nice representatives within a given knot class by minimizing these energies, which are self-avoiding iff $jp \geq 2$. In 1994 M. Freedman, Z.-X. He, and Z. Wang [2] showed for the Möbius *energy* (i. e. $j=2$, $p=1$) that finite energy curves have a local bi-Lipschitz constant arbitrarily close to 1.
Surprisingly there are curves of finite Möbius energy that are not differentiable. In this talk we will present an example of such a curve and ask about the situation for other values of j,p. If we exclude the range of high singularity $\{(j-2)p \geq 1\}$, the answer only depends on the product jp.

This is joint work with Simon Blatt *(RWTH Aachen).*

References:

[1] Jun O'Hara. Family of energy functionals of knots. *Topology Appl.*, 48(2):147–161, 1992.

[2] Michael H. Freedman, Zheng-Xu He, and Zhenghan Wang. Möbius energy

of knots and unknots. *Ann. of Math. (2)*, 139(1):1–50, 1994.

[3] Simon Blatt, Philipp Reiter. Does finite knot energy imply differentiability? *Preprints Inst. f. Math. RWTH Aachen*, to appear.

Jens Dittrich *(Ulm)*
A-priori Abschätzungen für konjugiert-konforme Abbildungen im Rahmen des Weylschen Einbettungsproblems

In diesem Vortrag betrachten wir Lösungen des Weylschen Einbettungsproblems $\mathbf{X} : \bar{B} \to \mathbb{R}^3$ mit $(d\mathbf{X})^2 = ds^2$ zu vorgeschriebenen Randwerten $\mathbf{Y} : \partial B \to \mathbb{R}^3$. Dabei ist ds^2 eine positiv-definite Riemannsche Metrik mit positiver Gaußscher Krümmung auf ganz $\bar{B}$ der Klasse $C^{4,\alpha}(\bar{B}) \cap C^{5,\alpha}(B)$. Wir drücken die geometrischen Invarianten der Randkurve in Termen der zweiten Fundamentalform $-(d\mathbf{X}, d\mathbf{N})$ der Fläche aus. Hier bezeichnet $\mathbf{N}$ eine Einheitsnormale, so dass $(\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{N}) > 0$ richtig ist. Damit können wir die mittlere Krümmung H bis zum Rand abschätzen und die zweite Fundamentalform in Termen der Invarianten der Randkurve auf dem Rand ausdrücken. Dies alles ermöglicht uns, für eine konjugiert-konforme Abbildung dieser Fläche einen Satz von F. Sauvigny aus dem Jahre 1999 anzuwenden, welcher die gewünschten a-priori Abschätzungen der $C^{2,\alpha}(\bar{B})$ Norm und der Jakobischen dieser Abbildung liefert.

Frank Müller *(Cottbus)*
On the reularity of surfaces with prescribed mean curvature and partially free boundaries

We discuss continuous, stationary surfaces with prescribed mean curvature and partially free boundaries $\{\Gamma, S\}$ in the Euclidean 3-space. At first, we present a new result concerning the regularity at the free boundary for a smooth support surface S. Then we report on the behaviour near meeting points of the Jordan arc Γ with S and near “edge type” singular points of S itself. These results generalize G. Dziuk’s investigations on minimal surfaces.

Tobias Lamm *(ETH Zürich)*

Conservation laws for fourth order systems in four dimensions

In the first part of the talk we show that a certain class of fourth order elliptic system for maps between a domain in $\mathbb{R}^4$ and an arbitrary Riemannian manifold is equivalent to a conservation law. The class of systems under investigation includes both intrinsic and extrinsic biharmonic maps.

In the second part of the talk we use the conservation law to give an easy proof of the continuity and the weak compactness property of solutions of the fourth order systems.

This is a joint work with Tristan Rivière (ETH Zürich).