Mathematik für Physiker III | Prof. Dr. Jens Franke
Universität Bonn, WS 2013/14 | Jan Büthe

Übungsblatt 11

Abgabe am 22.1.2014
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Es bezeichne

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

den Cotangens. Zeigen Sie, dass cot in $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ holomorph ist und bei $n\pi$ einfache Pole vom Residuum 1 besitzt. Zeigen Sie ferner, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

$$2\cot(2z) = \cot(z) + \cot(z + \tfrac{\pi}{2})$$

gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es sei f eine ungerade, in $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$ holomorphe Funktion mit einfachen Polen vom Residuum 1 an den ganzzahligen Vielfachen von π. Ferner erfülle f für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{\pi}{2}Z$ die Gleichung

$$2f(2z) = f(z) + f(z + \tfrac{\pi}{2}).$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f = \cot$ gilt.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $h = f - \cot$ und wenden Sie das Maximumprinzip auf den Kreis mit Radius 3π und Mittelpunkt 0 an, demnach eine nicht-konstante holomorphe Funktion ihr betragsmäßiges Maximum auf dem Rand annimmt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\Big) \tag{1}$$

gilt.
Hinweis: Nach rechter Skalierung läuft dies auf eine Anwendung der vorherigen Aufgabe hinaus. Der Beweis der Verdopplungsformel für die rechte Seite von (1) ergibt sich leicht durch Betrachtung der Partialsummen

$$s_m(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{m} \Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \Big).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Folgern Sie aus dem Wielandtschen Eindeutigkeitssatz, dass

$$\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z)$$

gilt.

***Aufgabe 1** (5 Punkte)**.** Beweisen Sie die Identität

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Berechnen Sie dazu die ersten Koeffizienten der Laurentreihe von $\pi\cot(\pi z)$ im Nullpunkt und nutzen Sie die Partialbruchentwicklung aus Aufgabe 3.
Das Inverse $\zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.608$ ist übrigens die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte natürliche Zahl von keiner Quadratzahl geteilt wird.