Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, WS 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Testatreihe 3A

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, -1, 1 - x)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (-1, 0, 0) \\ Q &= (-1, 1, 0) \\ R &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich R von P aus gesehen links von Q befindet.
Lösung: $-\frac{5}{6}$

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \leq t \leq \infty$ und $0 \leq \phi \leq g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 + 3 \cdot \cosh(\frac{t}{3}) \\ g(t) &= t \cdot \exp(-t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{4533}{400}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$f(z) = \log(|z|) + z^2 + i\arctan\Big(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\Big)$$
$$f(z) = \frac{1}{\sin(\cos(z))} + \arctan(1+3i)$$
$$f(z) = \frac{1}{\cosh(\sin(z))} - \frac{z^3}{1+z^4}$$

Lösung: C, B, B

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{4+e^{4n^2}}$$

Lösung: e^4

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$((-1+6\cdot i)\cdot \Re(z) + (-2+i)\cdot \Im(z) + 4 + 2\cdot i)\,dz$$

entlang folgender Kurve: Der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 von 1 nach -1 über i.
Lösung: $-8-4\cdot i+(-2-i)\cdot\pi$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\log(1+e^z) \qquad z = \pi i$$
$$\frac{\tan(z)^2+3}{z^2+\frac{\pi}{2}} \qquad z = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{z}{\log(z)} + \frac{\cos(z)}{z^2} \qquad z = 0$$

Lösung: N, P, N

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{-\sin(2z) - 4 \cdot \tan(4z) + 5 - 3 \cdot \cos(3z)}{3 \cdot \sin(3z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: $\frac{2}{9}$.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 + 5 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 - 5 \cdot z - 6)}\, dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt 2, mathemematisch positiv durchlaufen.
Lösung: $\frac{e \cdot \pi \cdot i}{12}$.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(\exp(4 \cdot z) + 1) \cdot (\exp(3 \cdot z) + 1)}{(\sin(2 \cdot z) - \cos(2 \cdot z))}$$

im Nullpunkt.
Lösung: $\frac{\pi}{8}$.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-5 \cdot t + 5) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 10 \cdot t^3 + 35 \cdot t^2 + 50 \cdot t + 24)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{20 \cdot \pi}{3} + \frac{15 \cdot \sqrt{2}\pi}{2} - 10 \cdot \sqrt{3}\pi$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-2 \cdot t + 5) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 13 \cdot t^3 + 61 \cdot t^2 + 123 \cdot t + 90)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{5\cdot\sqrt{3}\pi}{6} - 3 \cdot \sqrt{2}\pi + \frac{5\cdot\sqrt{5}\pi}{4}$.