Allgemeingültigkeit und Beweisbarkeit

- Zum 100. Geburtstag von Kurt Gödel -

Peter Koepke, Mathematisches Institut

Dies Academicus

Bonn, 31. Mai, 2006

universitätbonn

Kurt Gödel

geboren 28. April 1906 in Brünn, Mähren

1924 Studium Universität Wien

192Dissertation *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*

1930 Habilitationsschrift *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I*

1938 Mengentheoretische Konsistenzresultate

1940 Mitglied des *Institute for Advanced Study*, Princeton

gestorben 14. Januar 1978 in Princeton

Kurt Gödel

ca. 1929

Über die Vollständigkeit des Logikkalküls

“Dabei soll “Vollständigkeit” bedeuten, daß jede im engeren Funktionenkalkül ausdrückbare allgemein giltige Formel (...) sich durch eine endliche Reihe formaler Schlüsse aus den Axiomen deduzieren lässt.”

Kürzer:

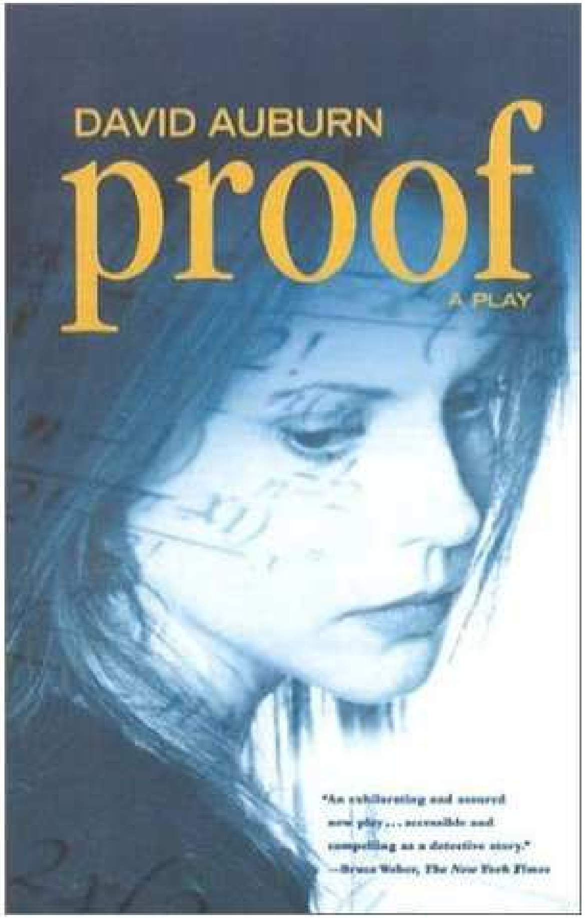
Jede allgemeingültige Aussage ist formal beweisbar.

Beweise

- mathematische Beweise

- Satz des Pythagoras; es gibt unendlich viele Primzahlen

- Letzter Satz von Fermat $a^n + b^n \neq c^n$ (A. Wiles 1994)


DAVID AUBURN
proof
A PLAY

Ein Beweis Sei $E+G=147$ und $E-G=5$.

$$\begin{aligned}
E &= 5+G \\
5+G+G &= 147 \\
5+2\cdot G &= 147 \\
2\cdot G &= 147-5 \\
2\cdot G &= 142 \\
G &= 71 \\
E &= 5+71 \\
E &= 76
\end{aligned}$$

Also: Wenn $E+G=147$ und $E-G=5$ dann $G=71$ und $E=76$.

Wir haben formal bewiesen:

Satz Wenn die üblichen Rechengesetze gelten und wenn $E + G = 147$ und $E - G = 5$ dann $G = 71$ und $E = 76$.

Der Satz ist allgemeingültig:

In jeder Struktur geeigneten Typs gilt dieser Satz.
Er gilt für die Struktur der ganzen Zahlen, die Struktur der rationalen Zahlen (Brüche), die Struktur der reellen Zahlen, usw. usw.

Satz (Pythagoras?) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl

Beweis Sei $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. ein Bruch.
Sei $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, und a ungerade oder b ungerade.
$2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$.
$2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$.
Fall 1. Sei a ungerade.
Dann ist $2 \cdot b \cdot b$ gerade und $a \cdot a$ ungerade. Widerspruch.
Also: Wenn a ungerade ist, folgt ein Widerspruch.
Fall 2. Sei a gerade.
Dann ist b ungerade. $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$.
$b \cdot b$ ist ungerade, $\frac{a}{2} \cdot a$ gerade. Widerspruch.
Also: Wenn a gerade ist, folgt ein Widerspruch.
Widerspruch. Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational. Qed

Ein formaler Beweis

- besteht aus einer Folge von mathematischen Aussagen.

- alle Aussagen lassen sich aus vorangehenden Aussagen mit Hilfe einfacher Umformungen (Schlussregeln) bilden.

- wird durch Schlüsselwörter wie “Sei”, “Also”, ... strukturiert.

David Hilbert (1862-1943)

David Hilbert

Endliche Liste allgemeiner Schlussregeln für formale Beweise

$$\frac{A(x) \quad x = T}{A(T)}$$

$$\frac{\text{Aus } A \text{ folgt } B \qquad \text{Aus nicht } A \text{ folgt } B}{B}$$ Fallunterscheidung

$$\frac{\text{Sei } A \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\; B}{\text{Also: Aus } A \text{ folgt } B}$$

$$\frac{A(x)}{\text{Für alle } x \text{ gilt } A}$$

usw.

Die Frage nach der Vollständigkeit

Hilbert und Ackermann 1928:

“Whether the axiom system is complete in the sense that from it all logical formulas that are correct for each domain of individuals can be derived is still an unsolved question. It is only known purely empirically that this axiom system suffices for all applications.”

Gödel 1930

Satz I: Jede allgemeingültige Formel des engeren Funktionenkalküls ist beweisbar.

Beweisidee: Sei B nicht beweisbar. Es genügt, eine Struktur zu konstruieren, in der B falsch ist.

Zur Konstruktion

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Aussagen, aus denen B *nicht* bewiesen werden kann. Sei A eine weitere Aussage.

Dann kann B aus $\mathcal{M}, A$ *nicht* bewiesen werden, oder
B kann aus $\mathcal{M}$, “nicht A” *nicht* bewiesen werden.

Denn:

Wenn B aus $\mathcal{M}, A$ und aus $\mathcal{M}$, “nicht A” bewiesen werden kann, so kann B nach der Fallunterscheidungsregel aus $\mathcal{M}$ bewiesen werden.

Zur Konstruktion

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Aussagen, so dass B *nicht* aus $\mathcal{M}$, “es gibt ein x, das A erfüllt” bewiesen werden kann. Sei y eine Variable, die bisher nicht verwendet wurde.

Dann kann B *nicht* aus $\mathcal{M}$, “es gibt ein x, das A erfüllt”, “y erfüllt A” bewiesen werden.

Das entspricht der “juristischen” Argumentation:

Wenn etwas (B) nicht aus “das Auto wurde gestohlen” folgt, dann folgt es auch nicht aus “der Dieb D hat das Auto gestohlen”. Dies kann im Bereich der formalen Beweise nachgebildet werden.

Zur Konstruktion

Mit diesen Prinzipien kann sukzessiv eine Folge

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

aufgebaut werden, so dass:

- jede Aussage A oder ihr Gegenteil “nicht A” kommt in der Folge vor
- mit “es gibt ein x, das A erfüllt” kommt auch eine Aussage “y erfüllt A” in der Folge vor
- aus $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ lässt sich B nicht beweisen.

Zur Konstruktion

Die Folge

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

beschreibt eine aus den Variablen aufgebaute Struktur.

In dieser Struktur gelten alle Sätze

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

Insbesondere ist B in der Struktur falsch. Qed.

Diskussion

Absolutes mathematisches Korrektheitskriterium: ein Beweis ist genau dann korrekt, wenn er (im Prinzip) als formaler Beweis formuliert werden kann.

Formalistische Sicht der Mathematik:
Mathematik = Axiome der Mengenlehre + Logikkalkül

Diese Sicht ignoriert: mathematische Intuitionen, Ideen, Anwendungen, Ästhetik, Geschichte, Kommunikation, usw.

Diskussion

Überprüfung von formalen Beweisen kann durch Computerprogramme erfolgen (*proof checking*)

Durch systematisches Erzeugen und Überprüfen von formalen Beweisen kann (im Prinzip) ein Beweis für jede allgemeingültige Aussage gefunden werden (*automatisches Beweisen*; Komplexitätsprobleme)

Praktisches automatisches Beweisen ist in beschränkten Si-tuationen möglich (Datenbanken, Robotik, ...)

Automatisches Beweisen ist eine Komponente von *künst-licher Intelligenz* (KI, AI)

Diskussion

Die mathematische Sprache mit dem Gödelschen Vollständigkeitssatz sind Muster für die Definition und Untersuchung anderer Sprachen (Programmiersprachen, natürliche Sprachen, Linguistik)

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz widerspricht nicht den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen:
“Unbeweisbare Wahrheiten”, etwa über natürliche Zahlen, sind im Standardmodell der natürlichen Zahlen wahr. Sie sind aber *nicht* allgemeingültig, da es andere Modelle der betrachteten Zahlentheorie gibt, in denen die “unbeweisbare Wahrheit” falsch ist.