Eine mathematische Reise ins Unendliche

Peter Koepke
Universität Bonn

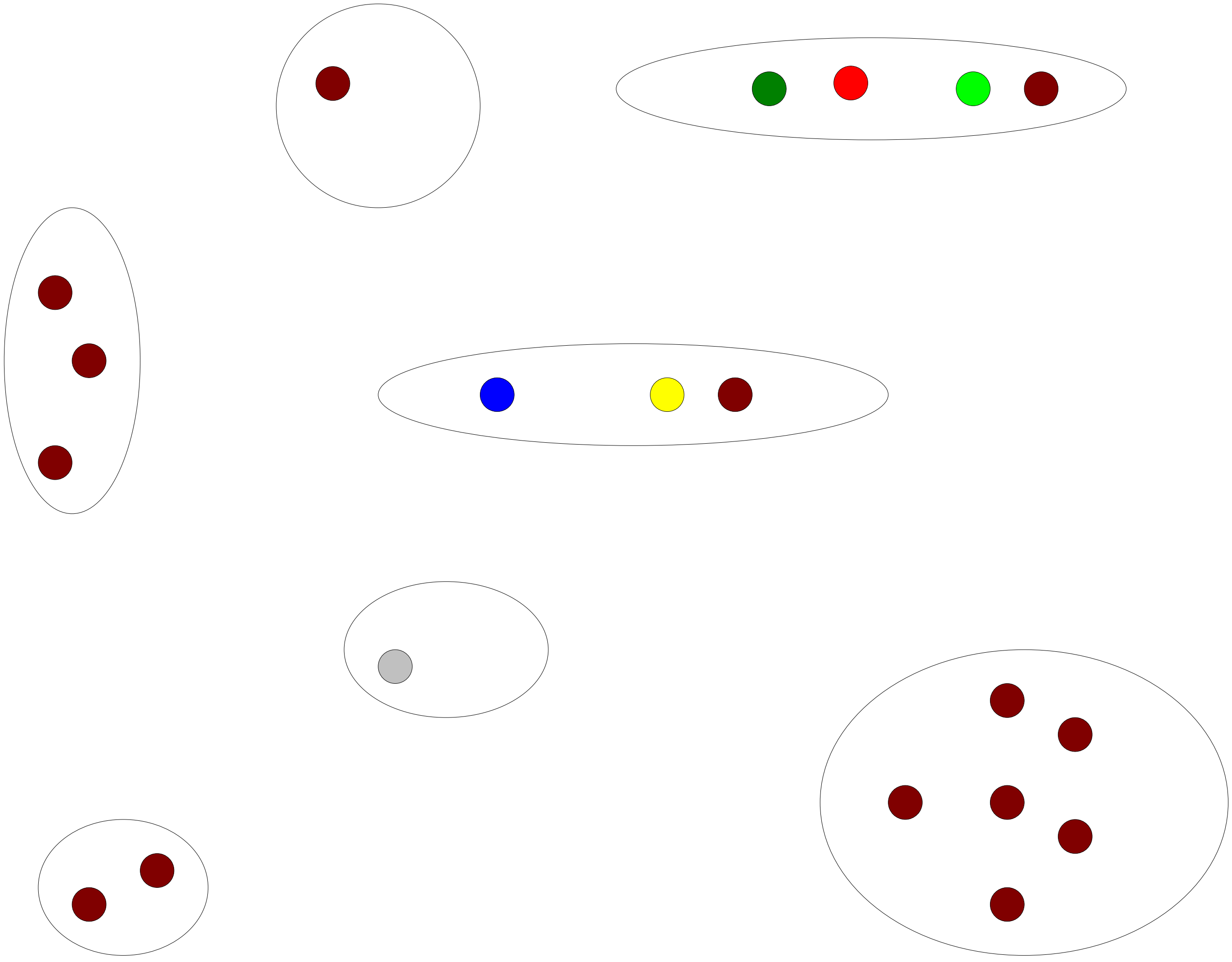
Treffen sich die Schienen im Unendlichen?
Gibt es unendlich ferne Punkte?
Gibt es unendliche Zahlen?

1. Antwort: Nein!

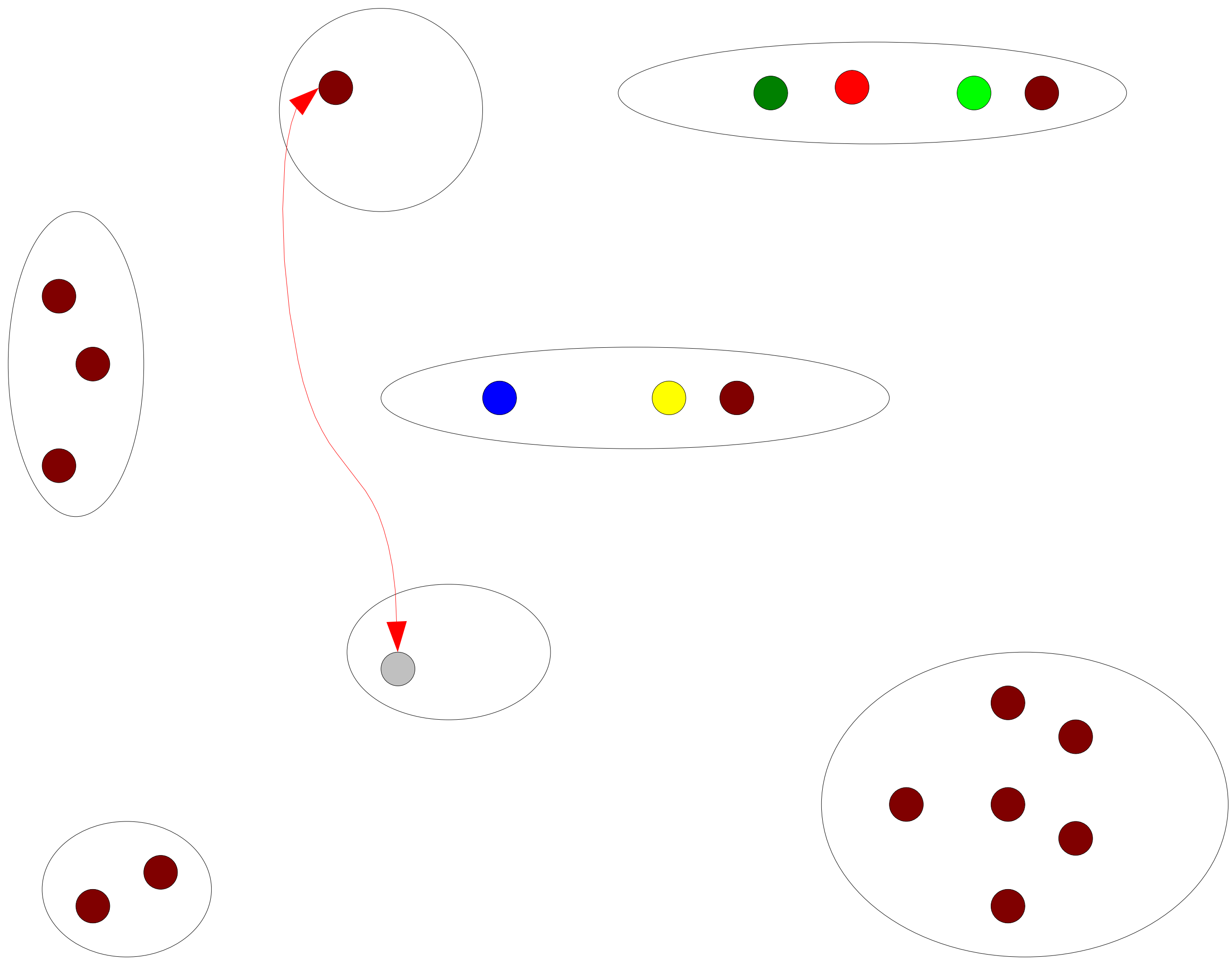
..., so prostestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer *Vollendeten*, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, ...

Carl Friedrich Gauß, 1831

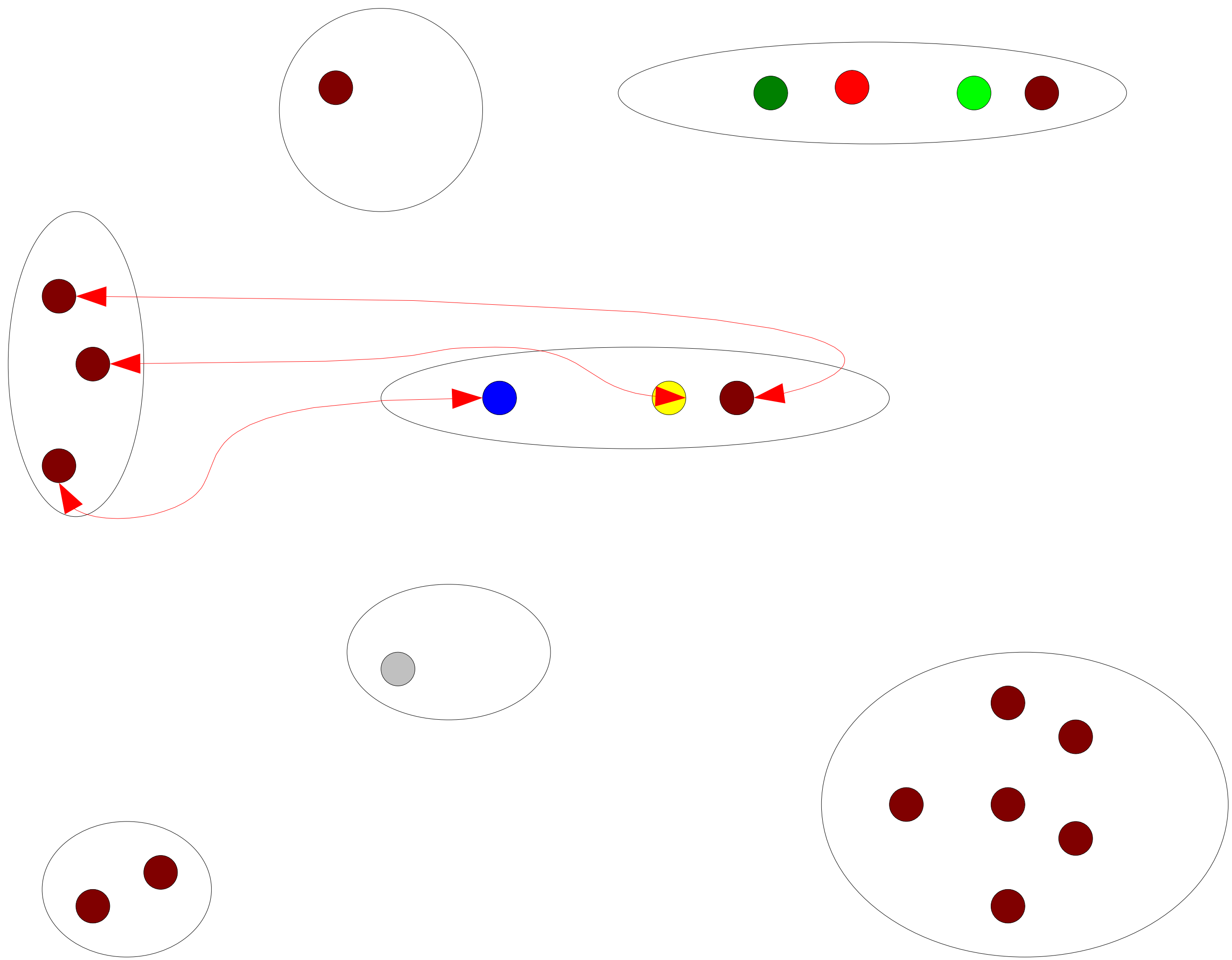
Die Welt der endlichen Objekte



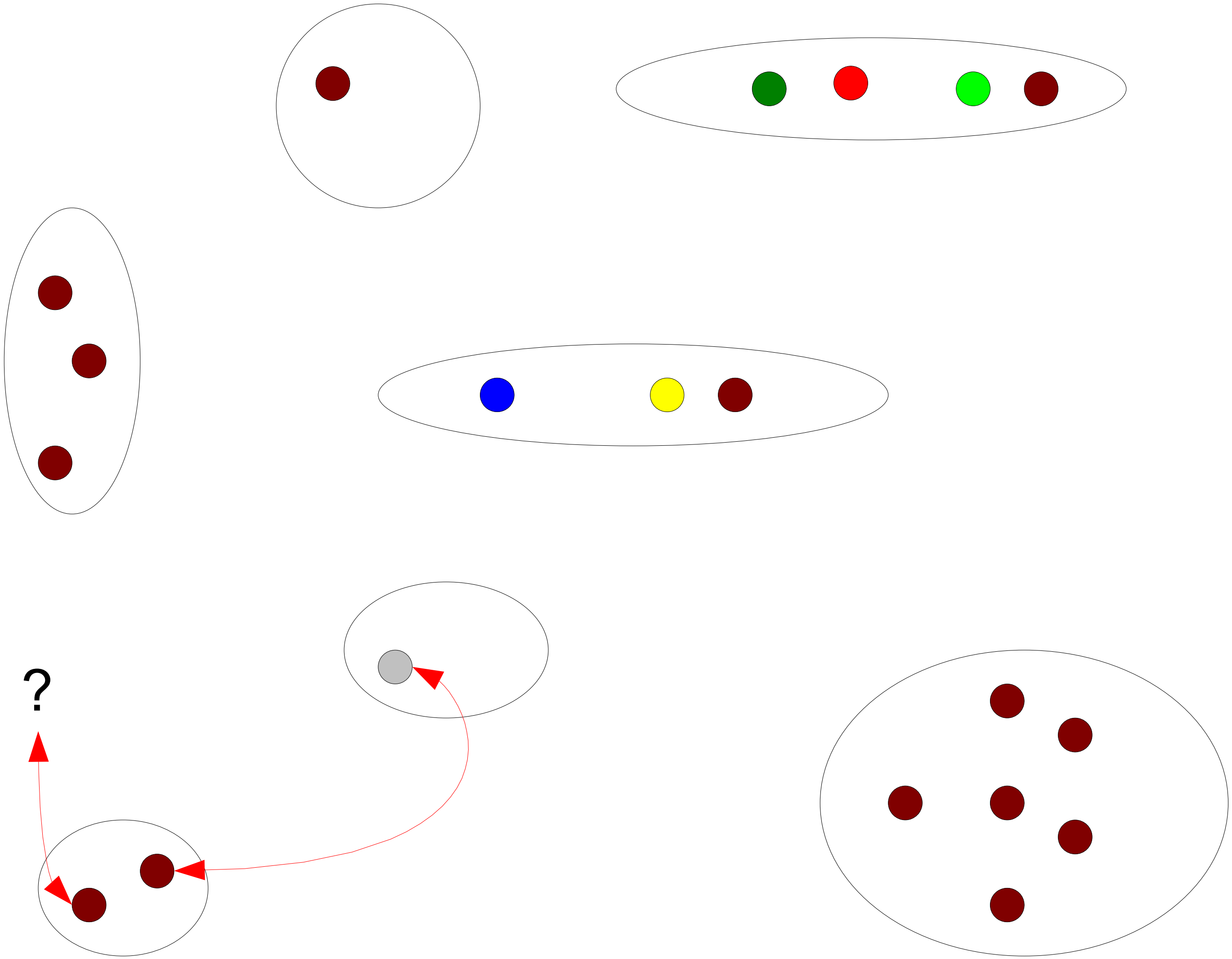
Die Welt der endlichen Objekte



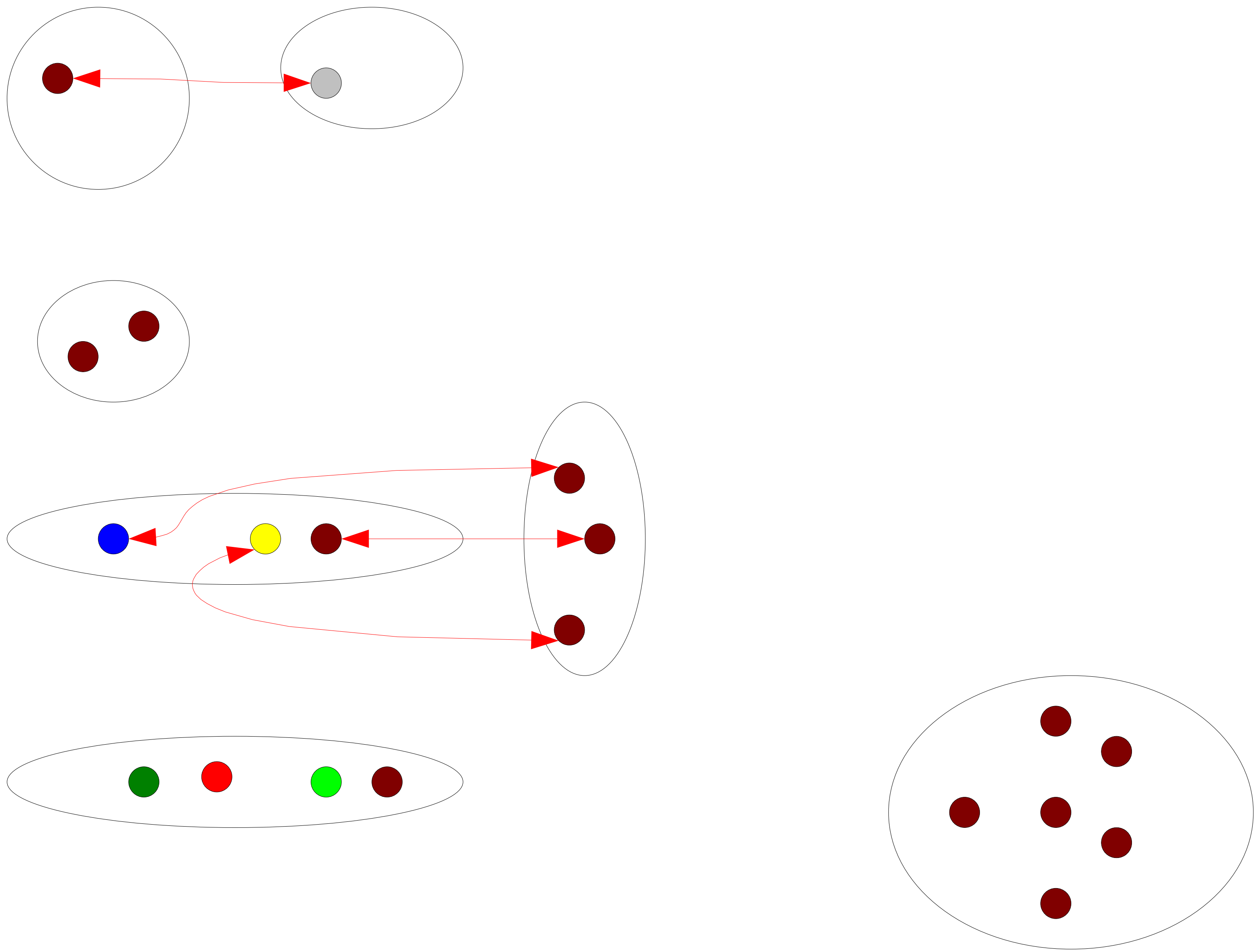
Die Welt der endlichen Objekte



Die Welt der endlichen Objekte

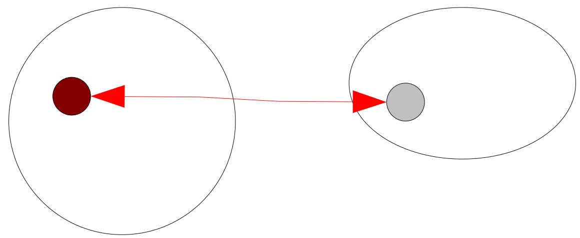


Zahlen

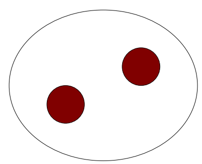


Zahlen

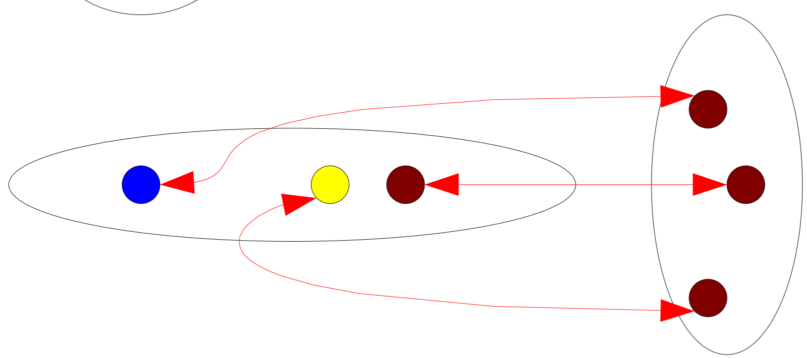
1:



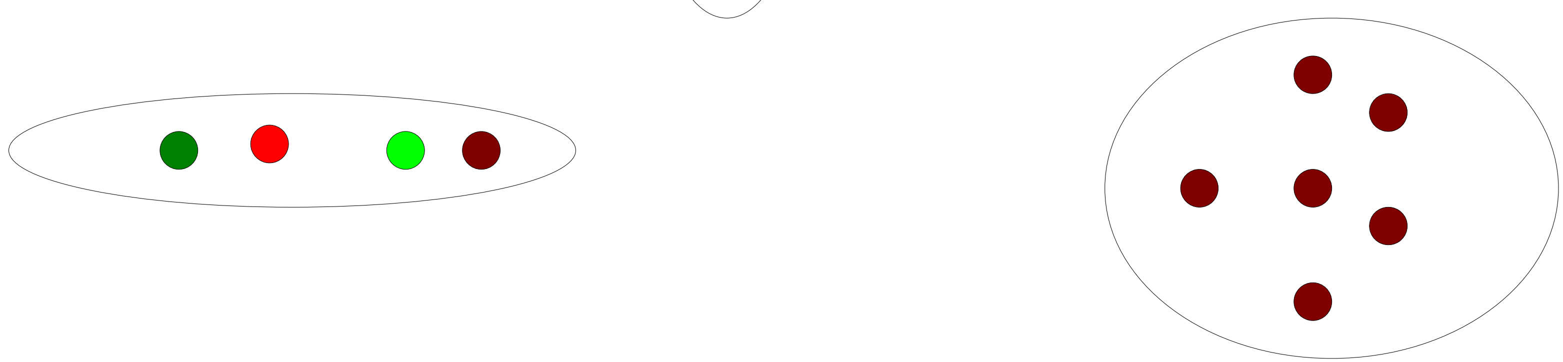
2:



3:



4:

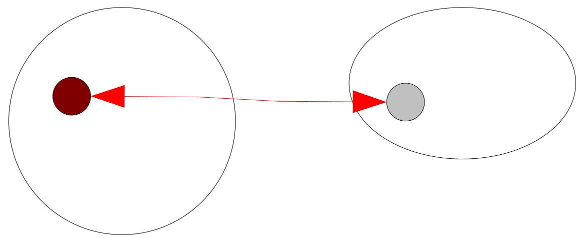


.

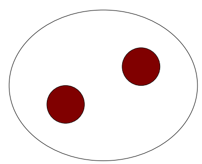
.

Zahlen

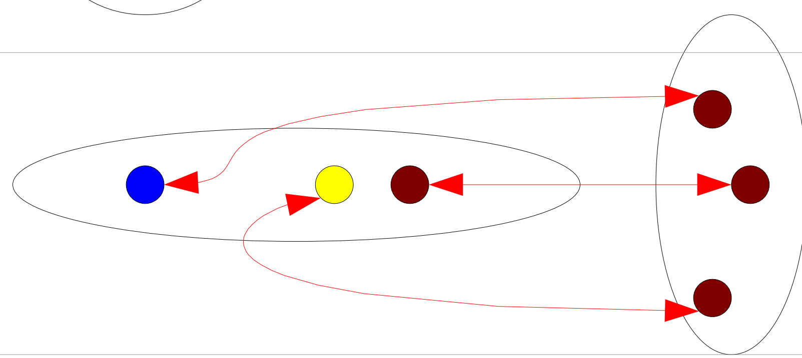
1:



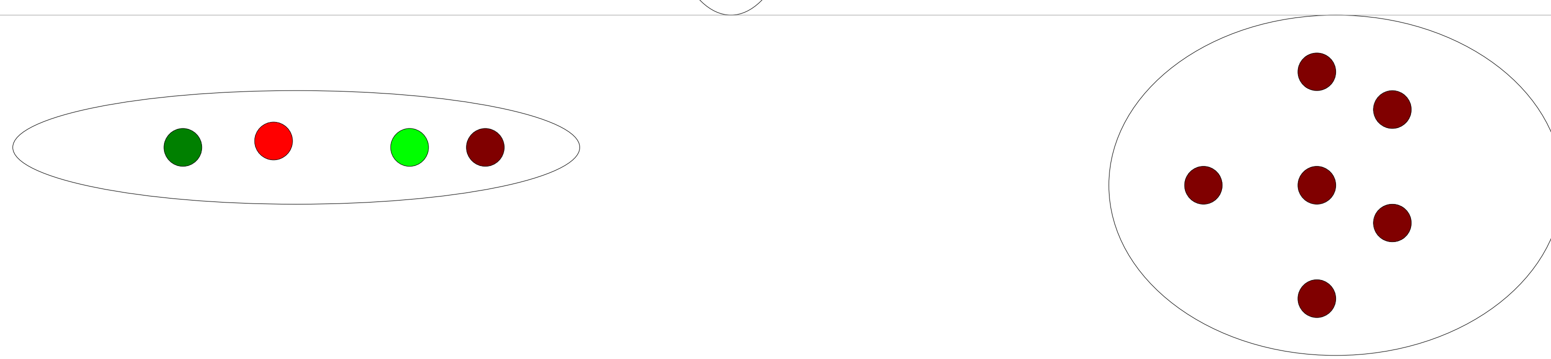
2:



3:



4:



.

.

Große Zahlen

Große Zahlen

8 Gigabyte =

$$8\cdot\underbrace{2\cdot2}_{\text{Produkt mit 30 Faktoren}}\ \text{Byte}$$

Große Zahlen

8 Gigabyte =

$8 \cdot 2$ Byte =

$2 \cdot 2$ Byte

Große Zahlen

8 Gigabyte =

8·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 Byte =

2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 Byte =

2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 Bit

Große Zahlen

8 Gigabyte =

$8\cdot2$ Byte =

$2\cdot2$ Byte =

$\underbrace{2\cdot2}_{\text{Produkt mit 36 Faktoren}}$ Bit

Große Zahlen

Der 8 Gigabyte USB-Stick hat

$$2^{36} = 68719476736$$

Speicherzellen

Große Zahlen

$$\underbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\;\ldots}_{2^{36}\text{ Speicherzellen}}$$

Große Zahlen

0	1	1	0	1	0	...

2^{36} Speicherzellen

Anzahl der möglichen Speicherinhalte:

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot$ ....

Produkt mit 2^{36} Faktoren

Große Zahlen

Der 8 Gigabyte USB-Stick hat

$$2^{\left(2^{36}\right)} = 2^{68719476736}$$

mögliche Speicherinhalte

Große Zahlen

Der 8 Gigabyte USB-Stick hat

$$2^{(2^{36})} = 2^{68719476736}$$

mögliche Speicherinhalte

Zum Vergleich: es gibt ca. 2^{33} Menschen; es gibt $< 2^{400}$ Elementarteilchen im Universum

Große Zahlen

Die Menge der 2^{36} Speicherelemente hat

$$2^{(2^{36})} = 2^{68719476736}$$

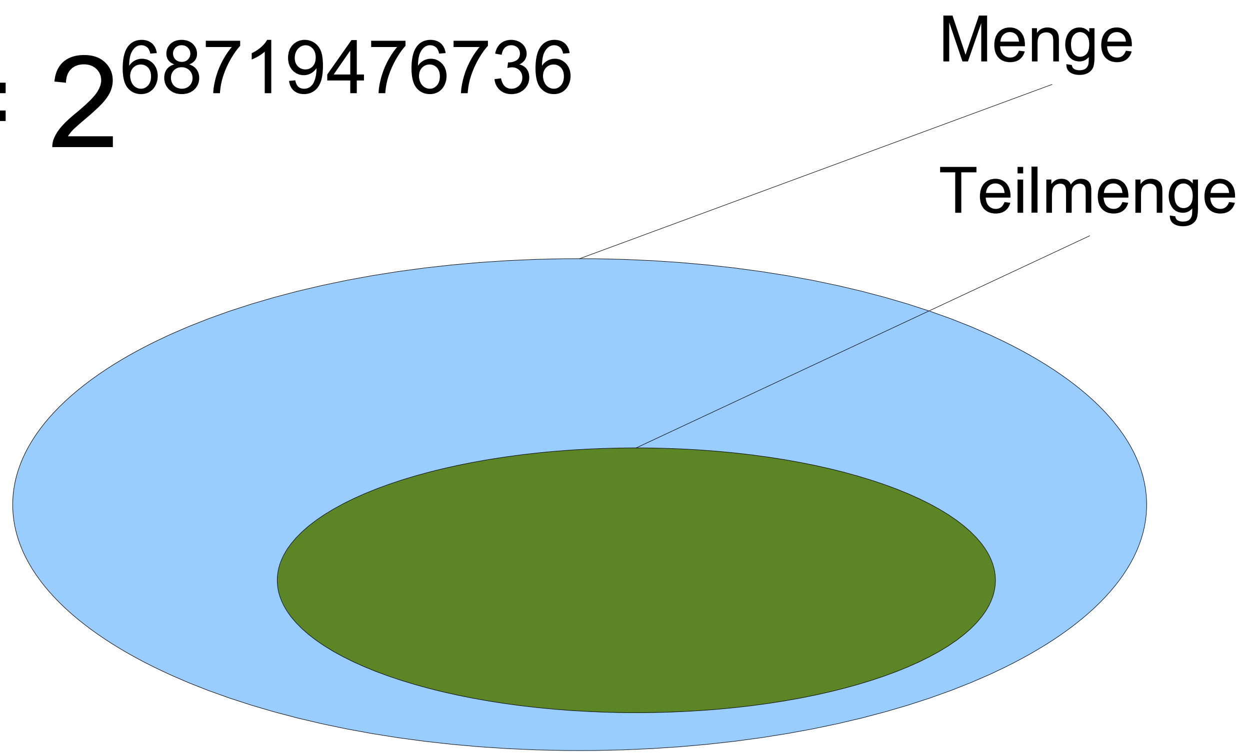
Teilmengen

Große Zahlen

Die Menge der 2^{36} Speicherelemente hat

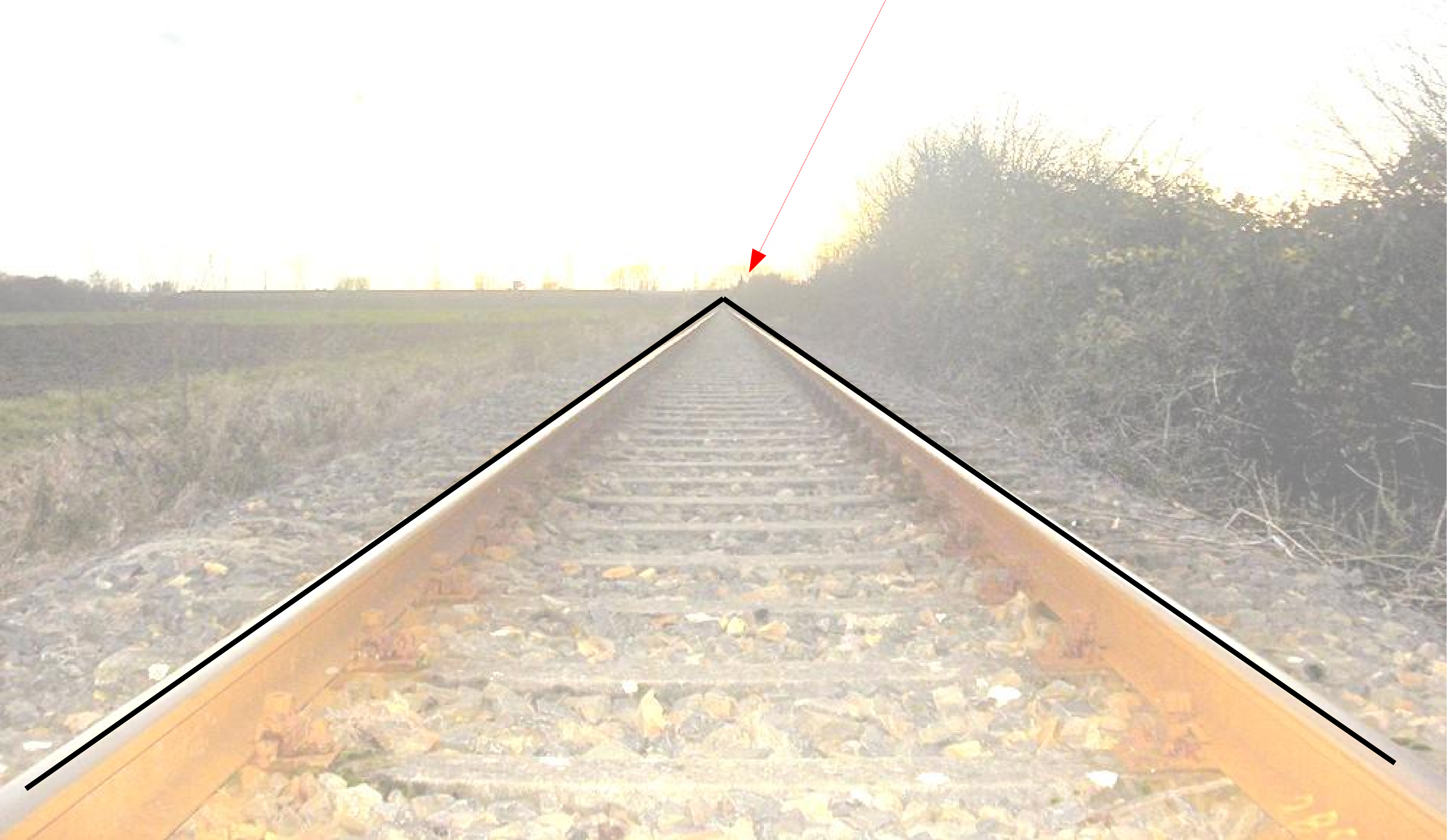
$$2^{(2^{36})} = 2^{68719476736}$$

Teilmengen



Treffen sich die Schienen im Unendlichen?
Gibt es unendlich ferne Punkte?
Gibt es unendliche Zahlen?

2. Antwort: Ja!

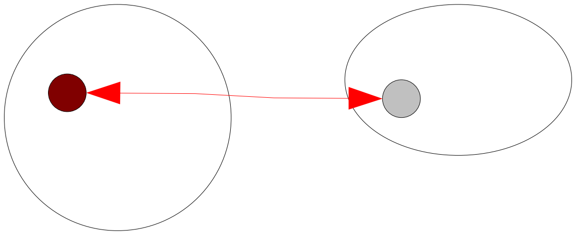


Eine Menge kann aus einer natürlichen Zahl von Dingen bestehen oder nicht; je nachdem heißt sie *endlich* oder *unendlich*. Beispiele sind einerseits die Menge der Einwohner einer Stadt, [...], andererseits die Menge aller natürlichen Zahlen ...

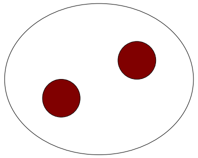
Felix Hausdorff, 1927

Endliche und unendliche Anzahlen

1:



2:



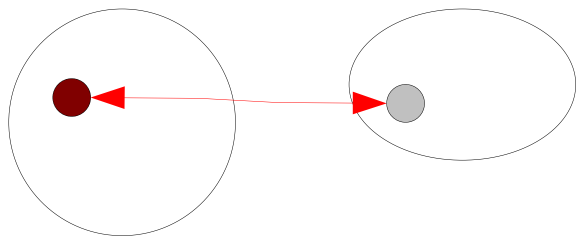
...

...

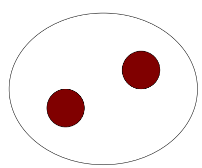
1 2 3 4 5 6 7 ....

Endliche und unendliche Anzahlen

1:



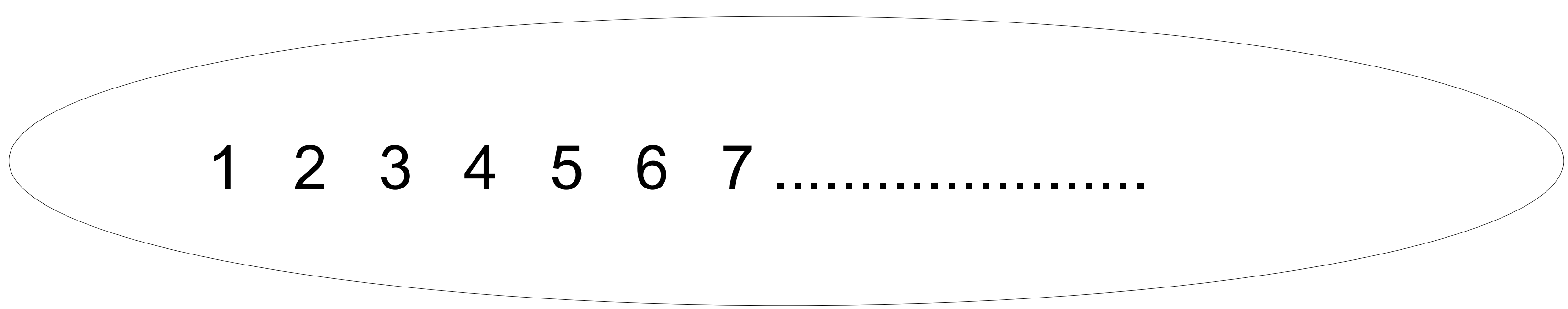
2:



...

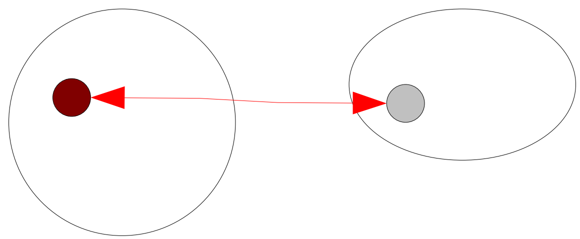
...

$\aleph_0$

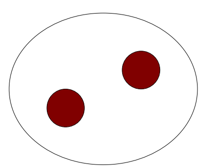


Endliche und unendliche Anzahlen

1:



2:



…

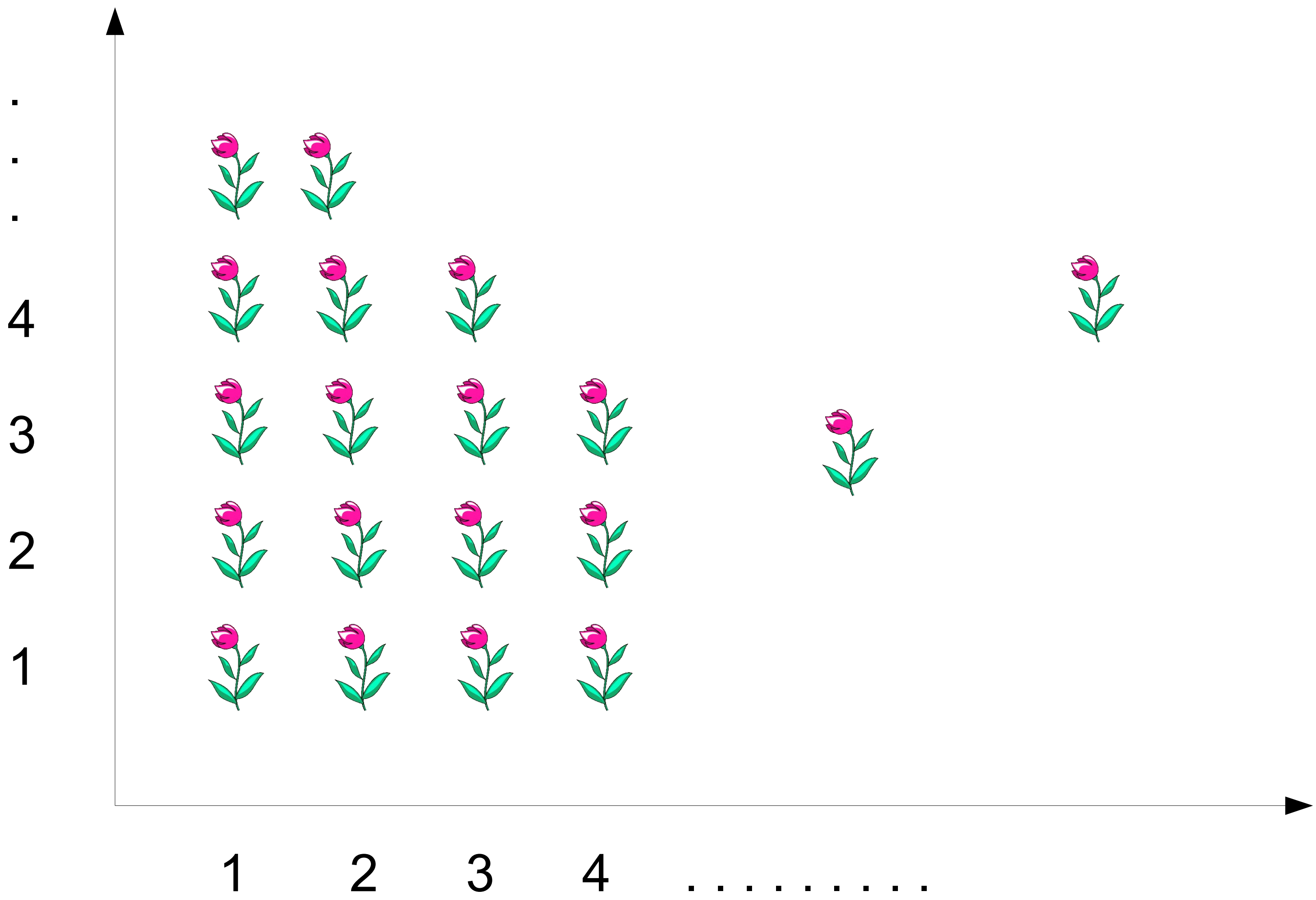
„Aleph-null“ (Cantor)

…

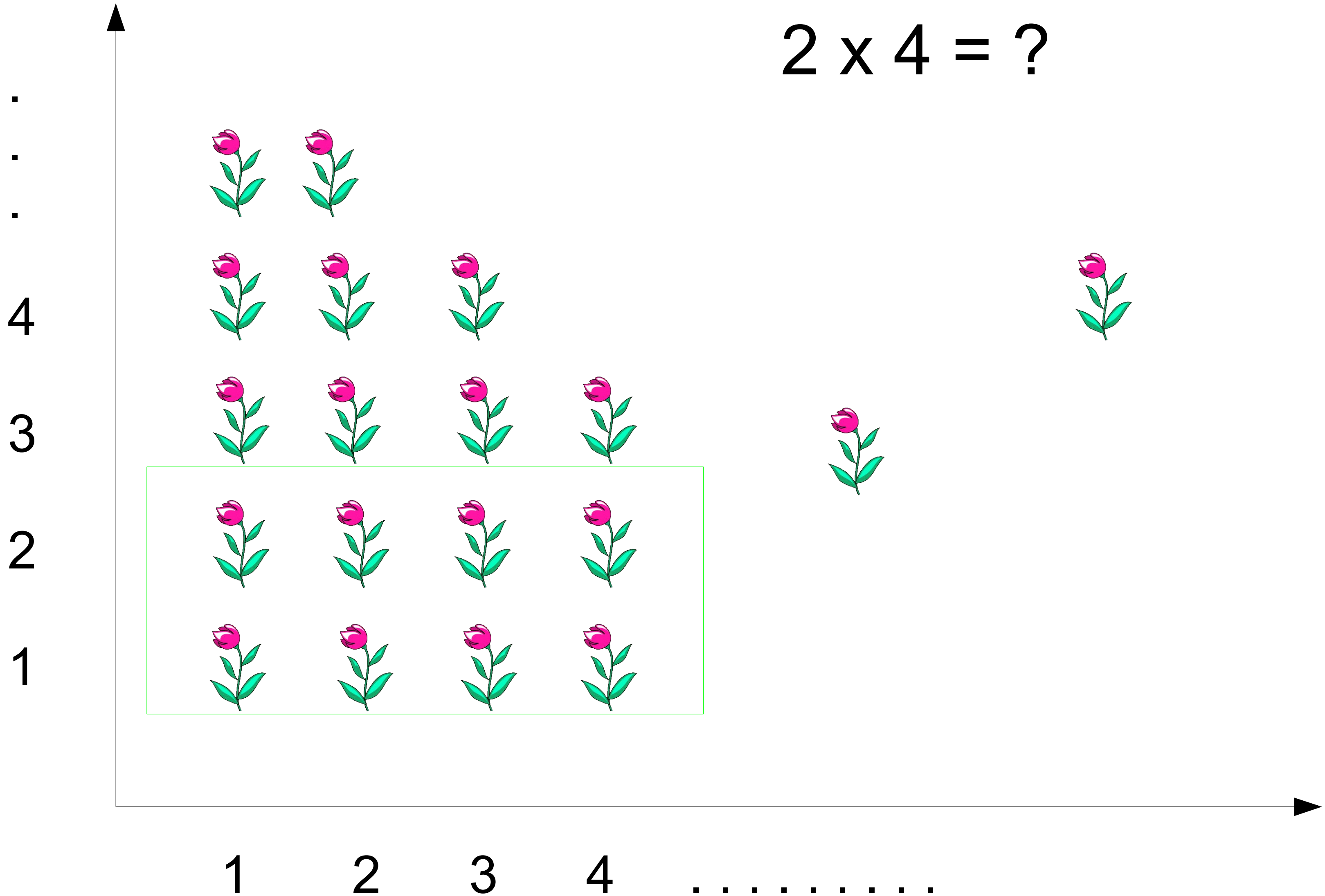
$\aleph_0$

1 2 3 4 5 6 7 ....

Rechnen mit $\aleph_0$

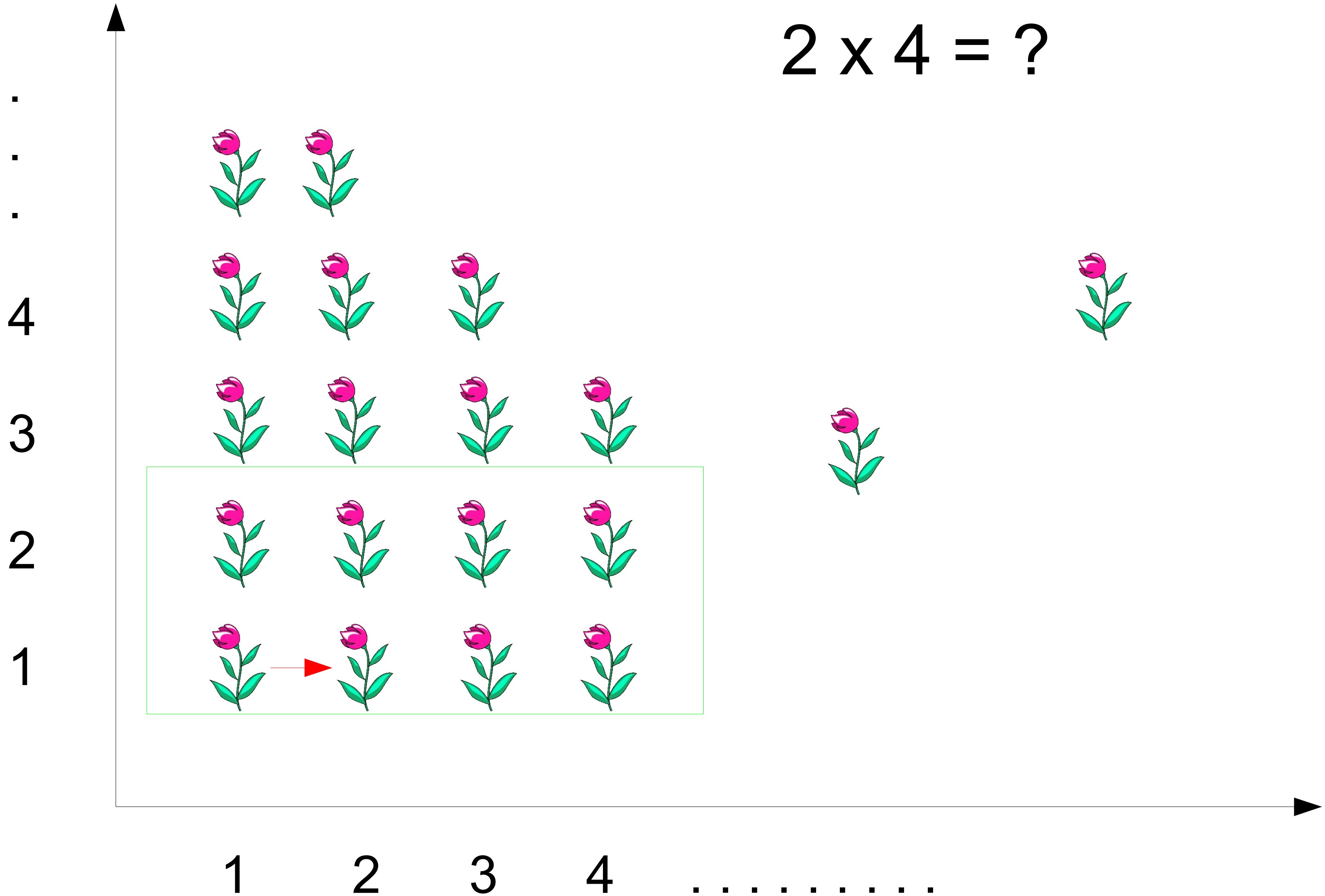


Rechnen mit $\aleph_0$



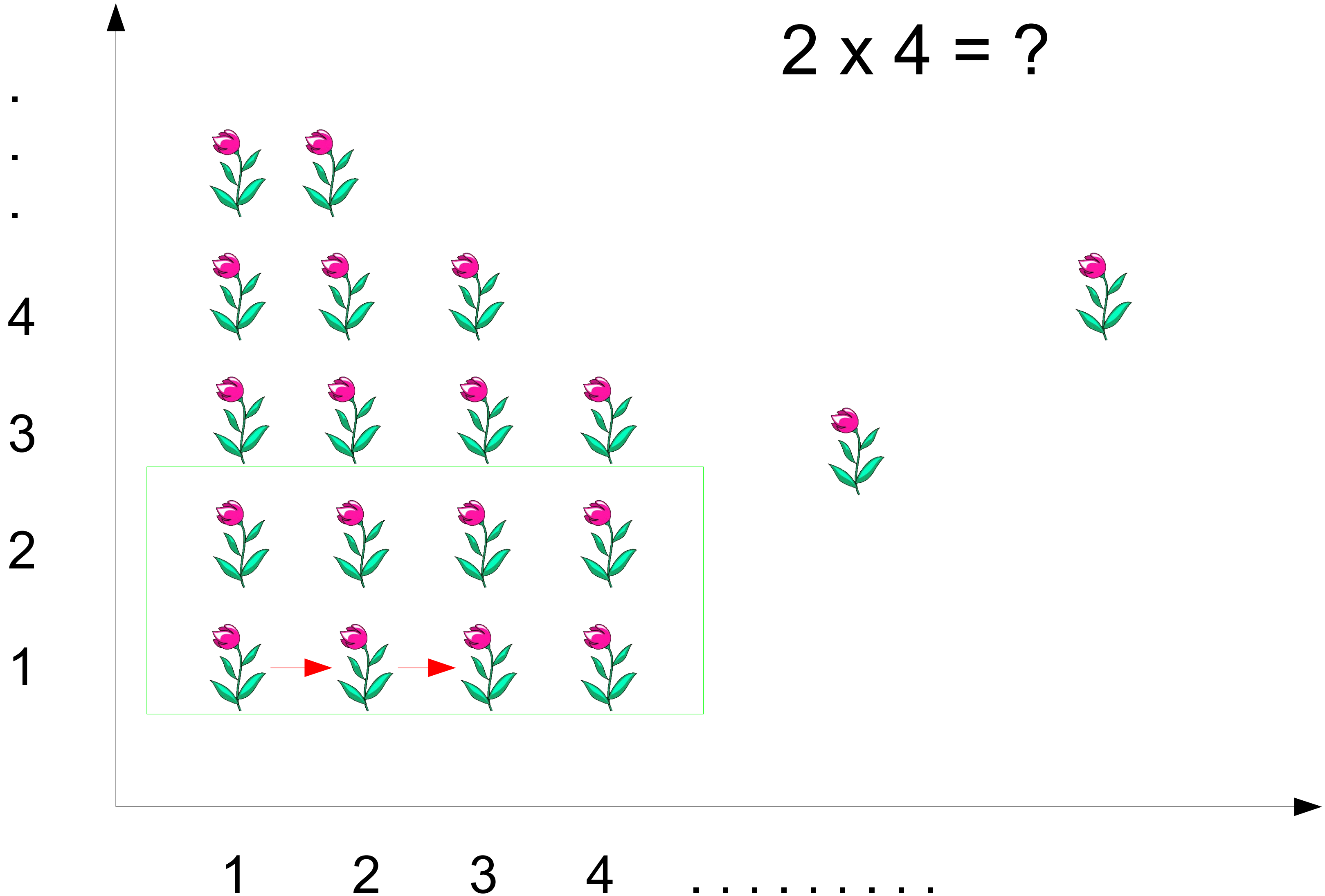
Rechnen mit $\aleph_0$

$2 \times 4 = ?$

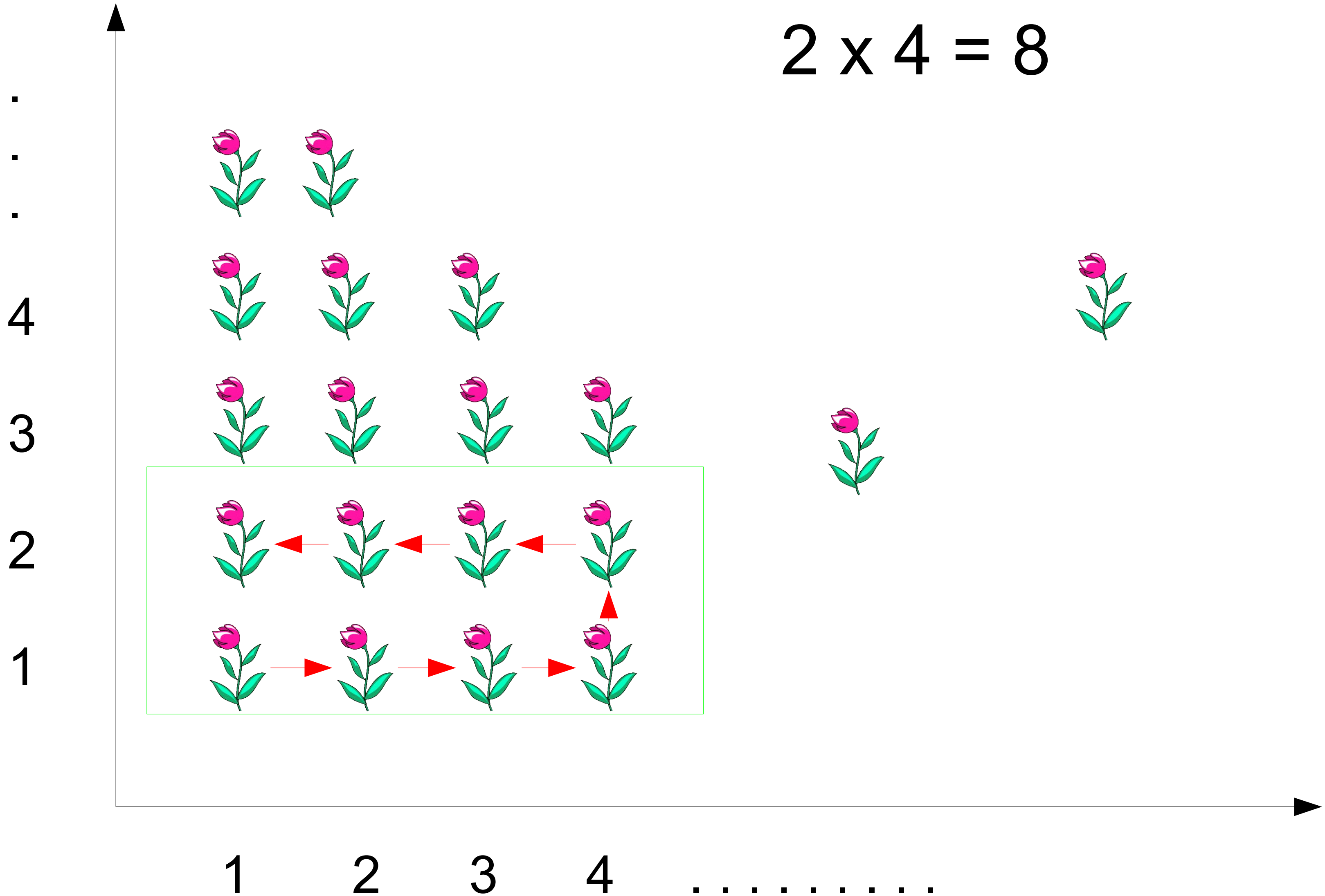


Rechnen mit $\aleph_0$

$2 \times 4 = ?$

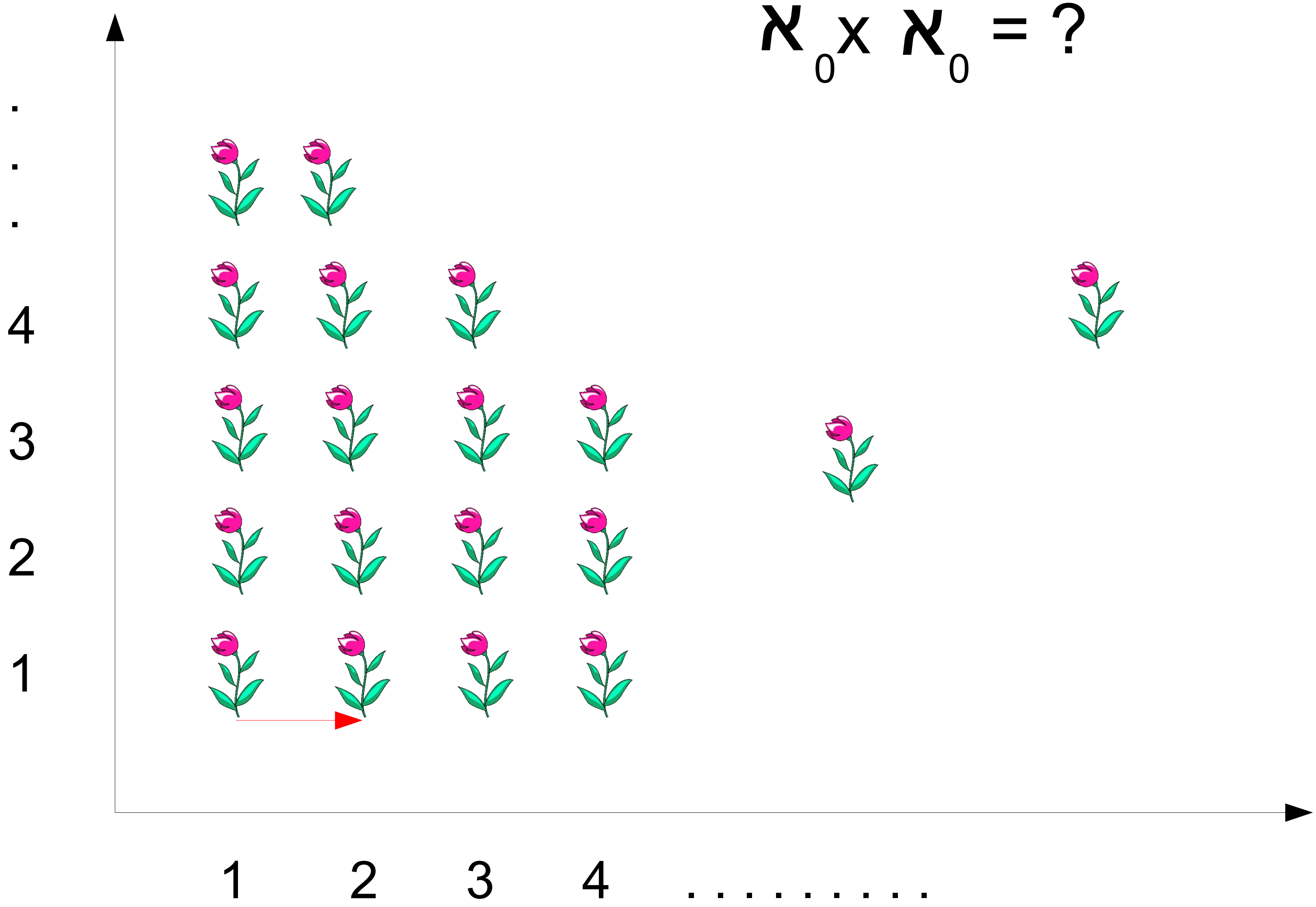


Rechnen mit $\aleph_0$



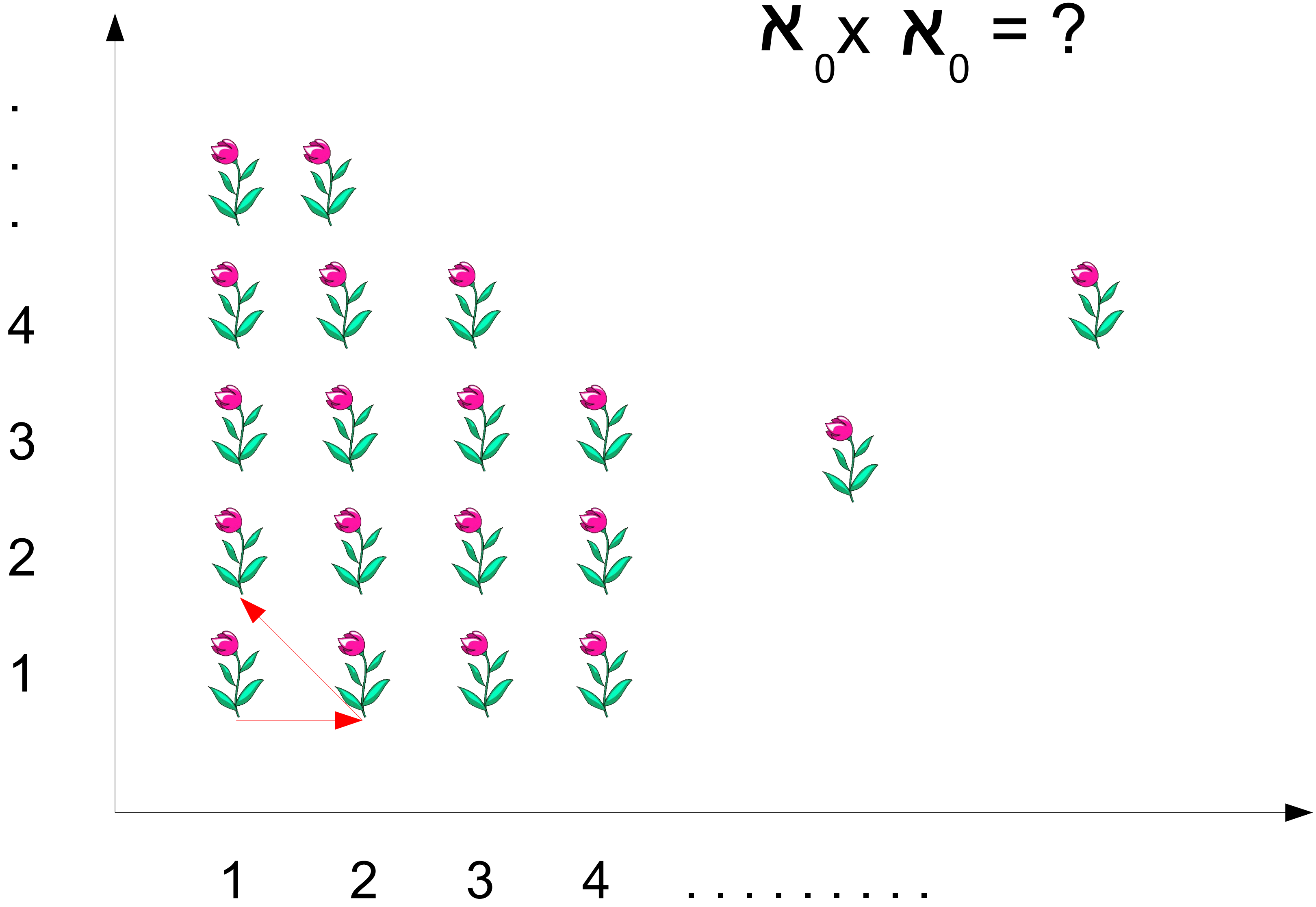
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$



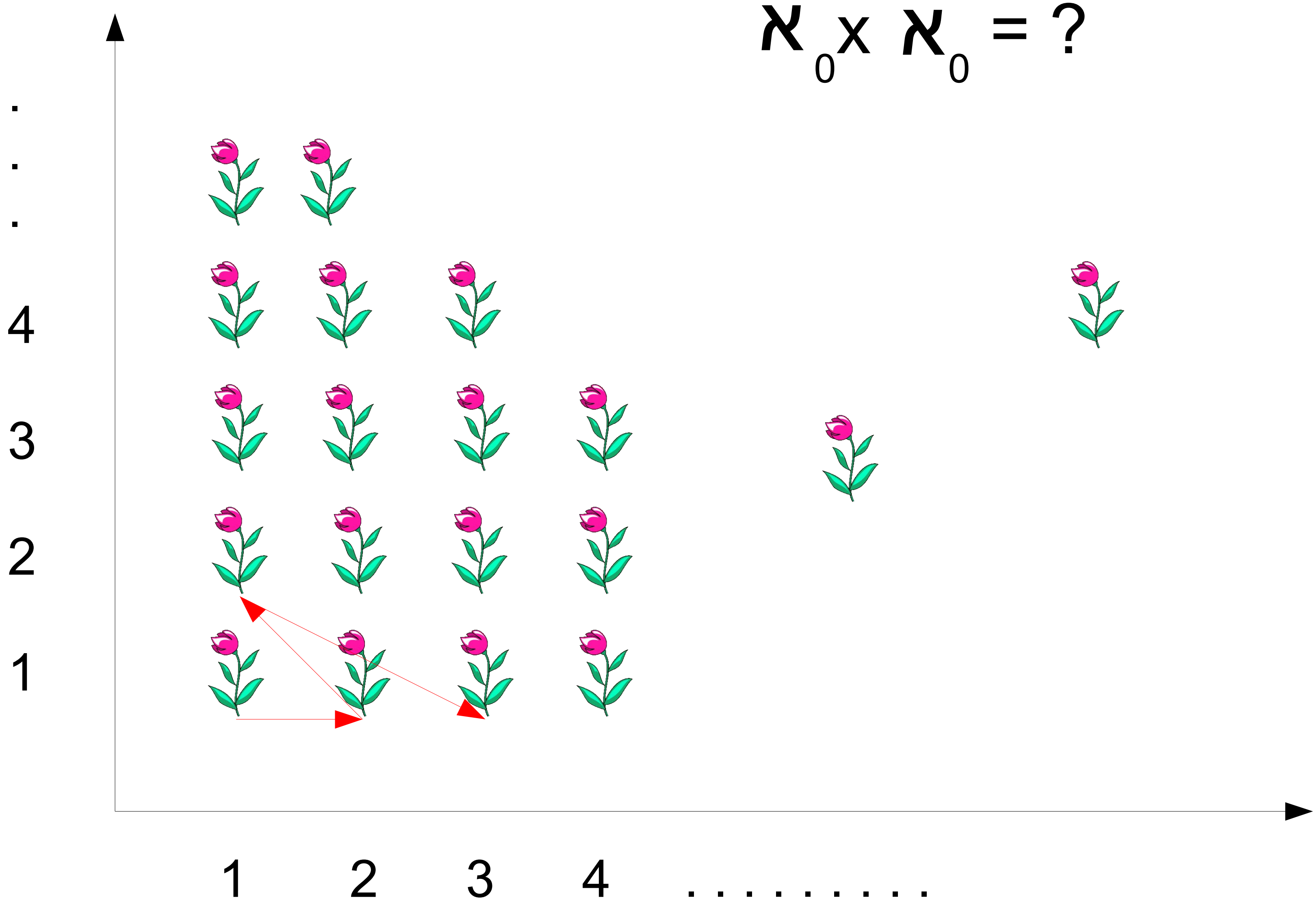
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$



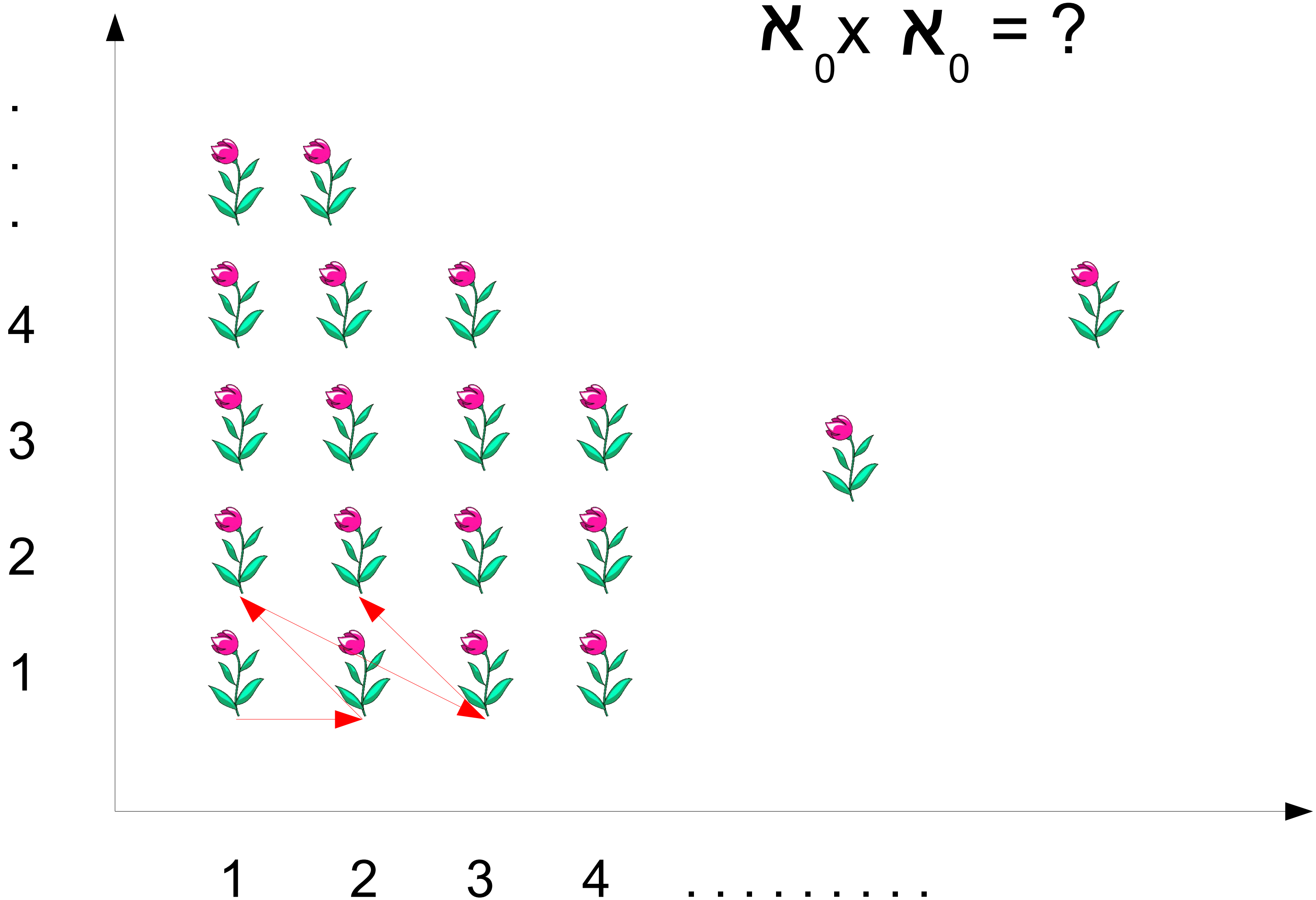
Rechnen mit $\aleph_0$

$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$



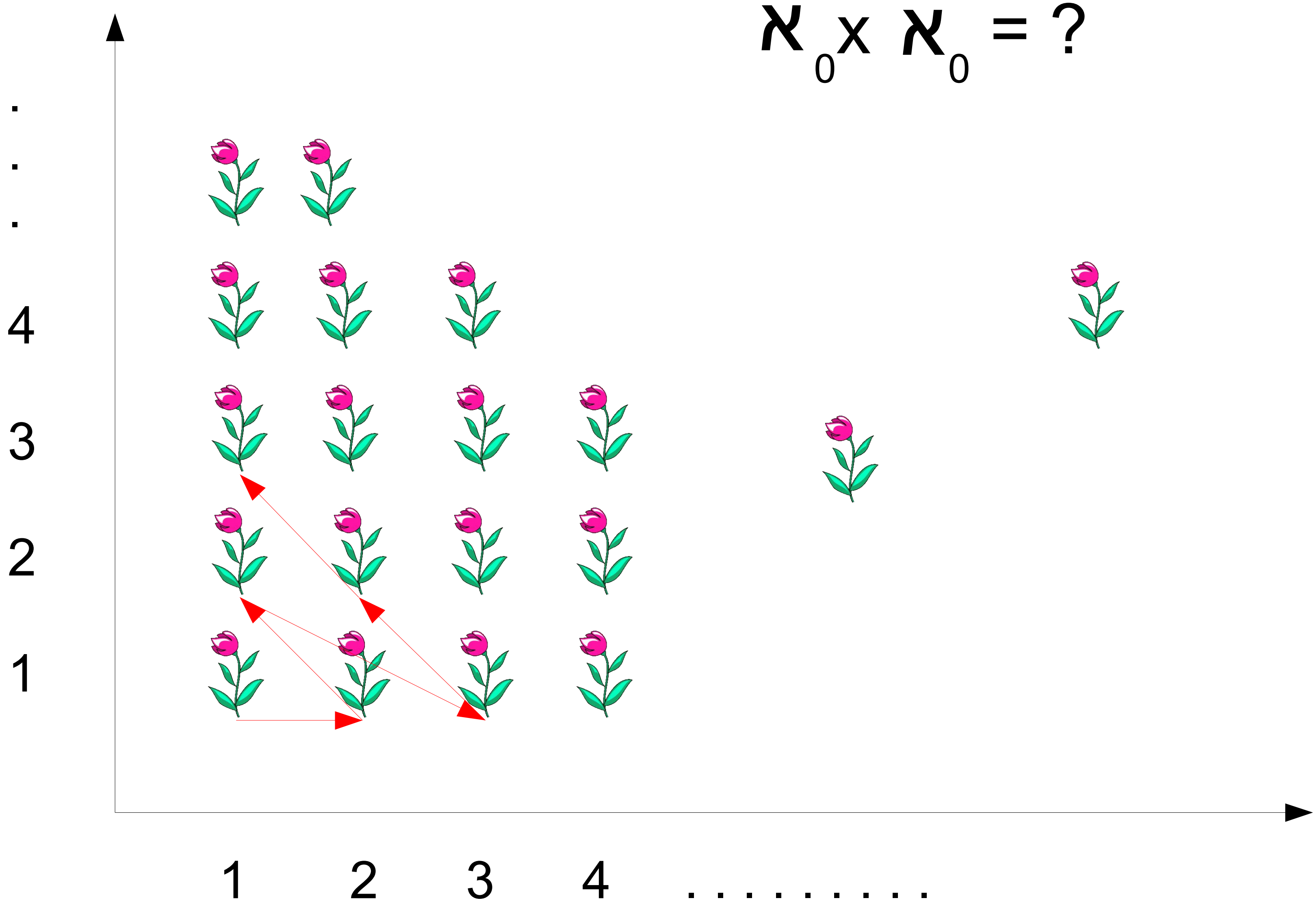
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$



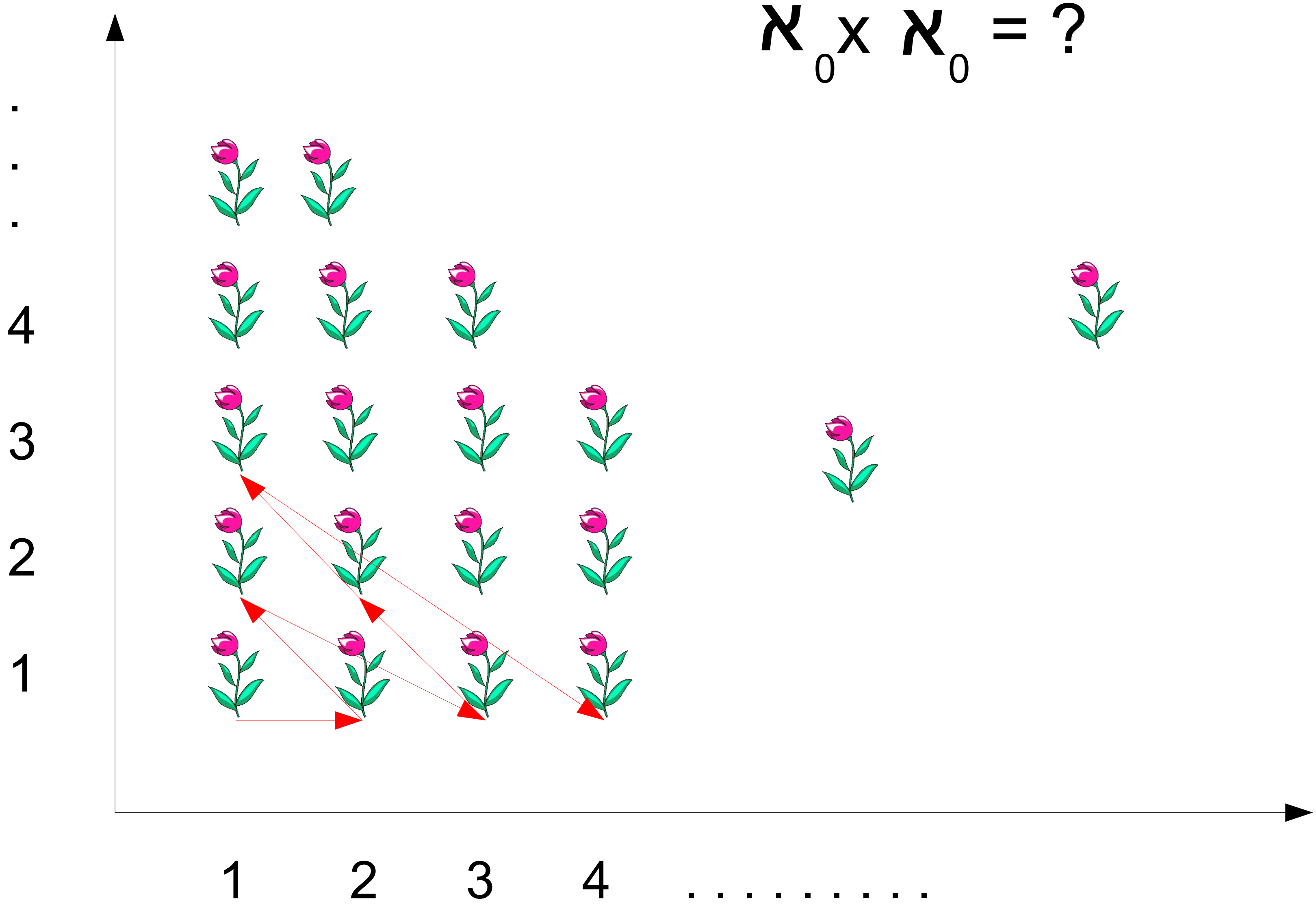
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$



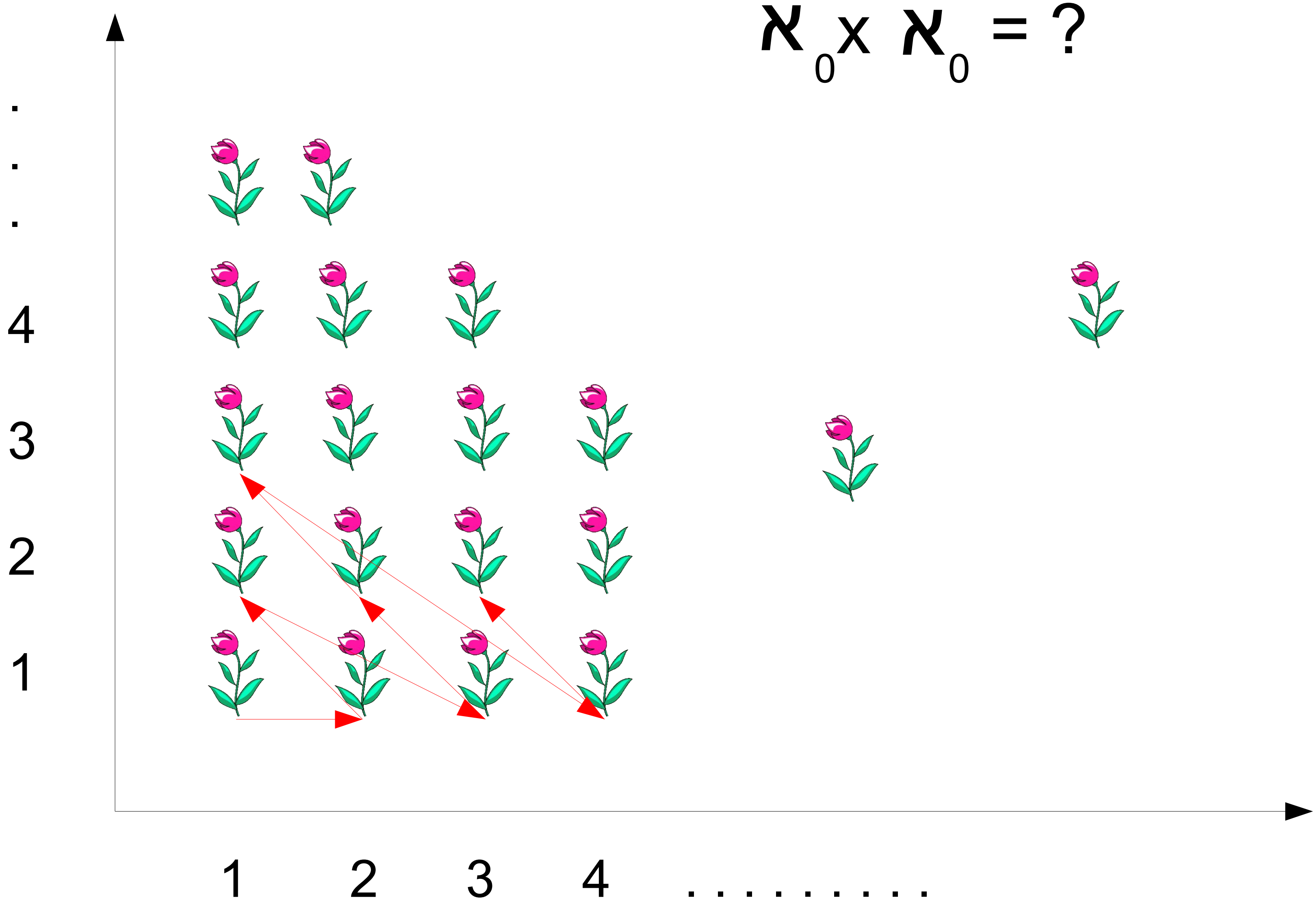
Rechnen mit $\aleph_0$

$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$



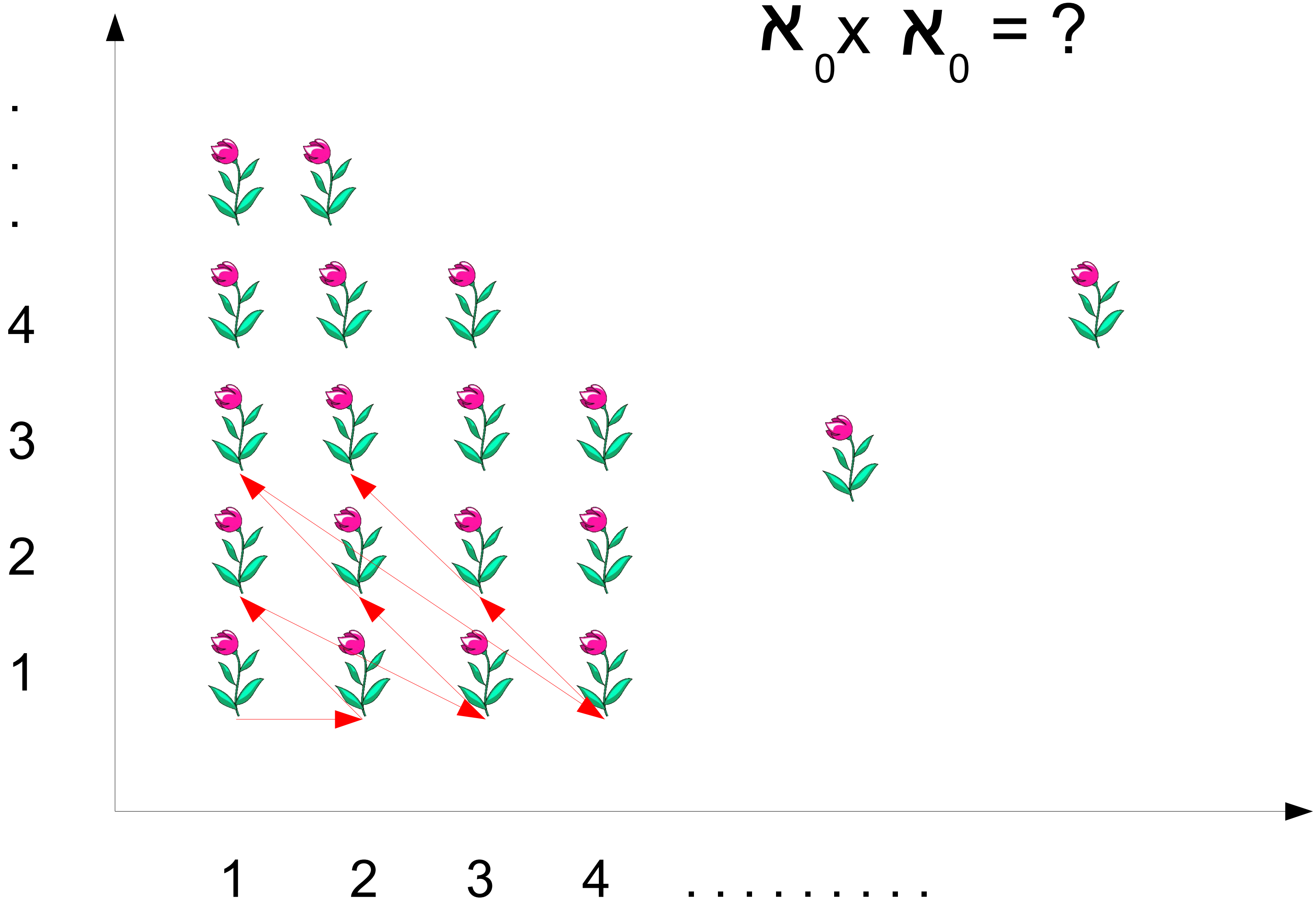
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$



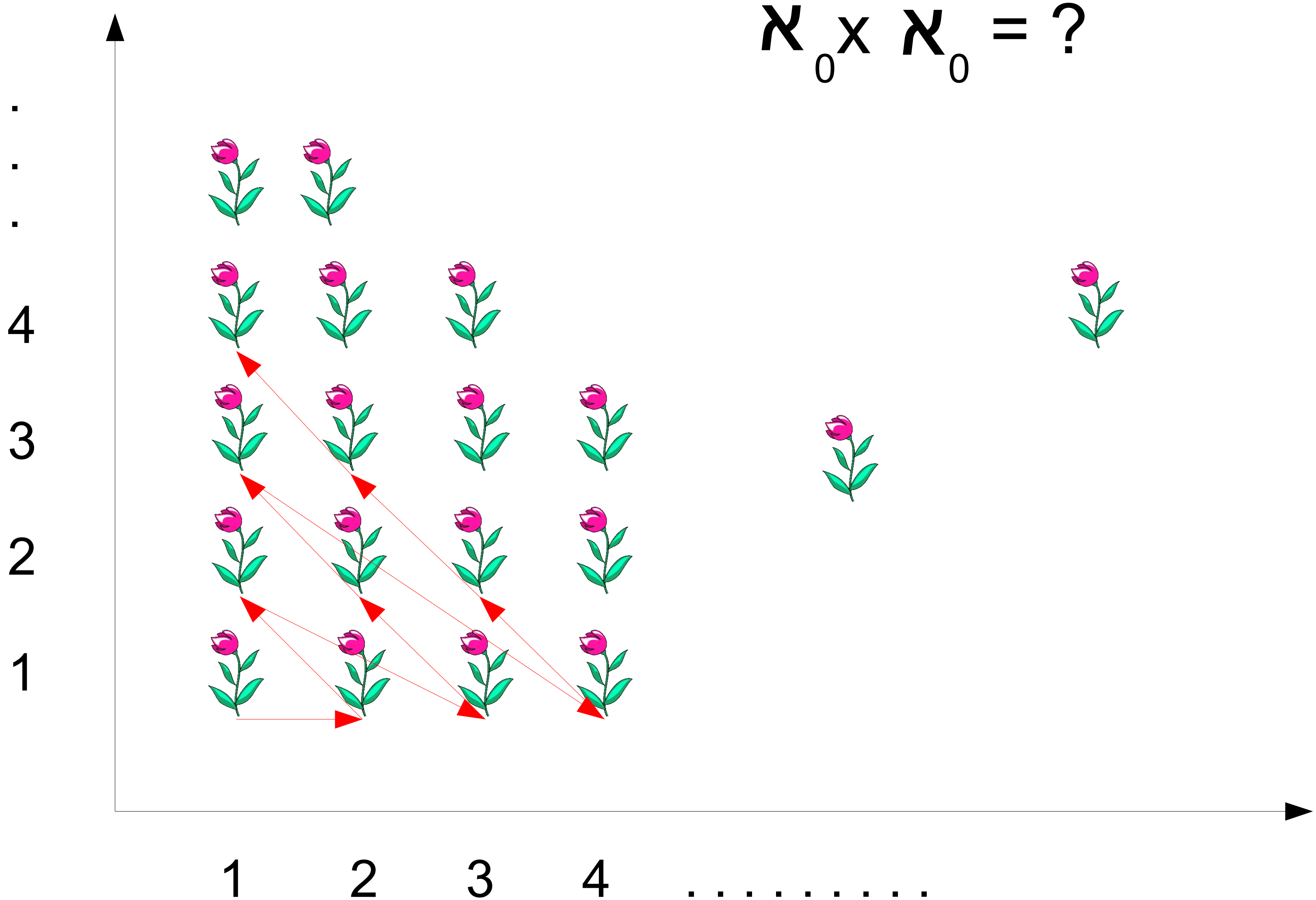
Rechnen mit $\aleph_0$

$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$



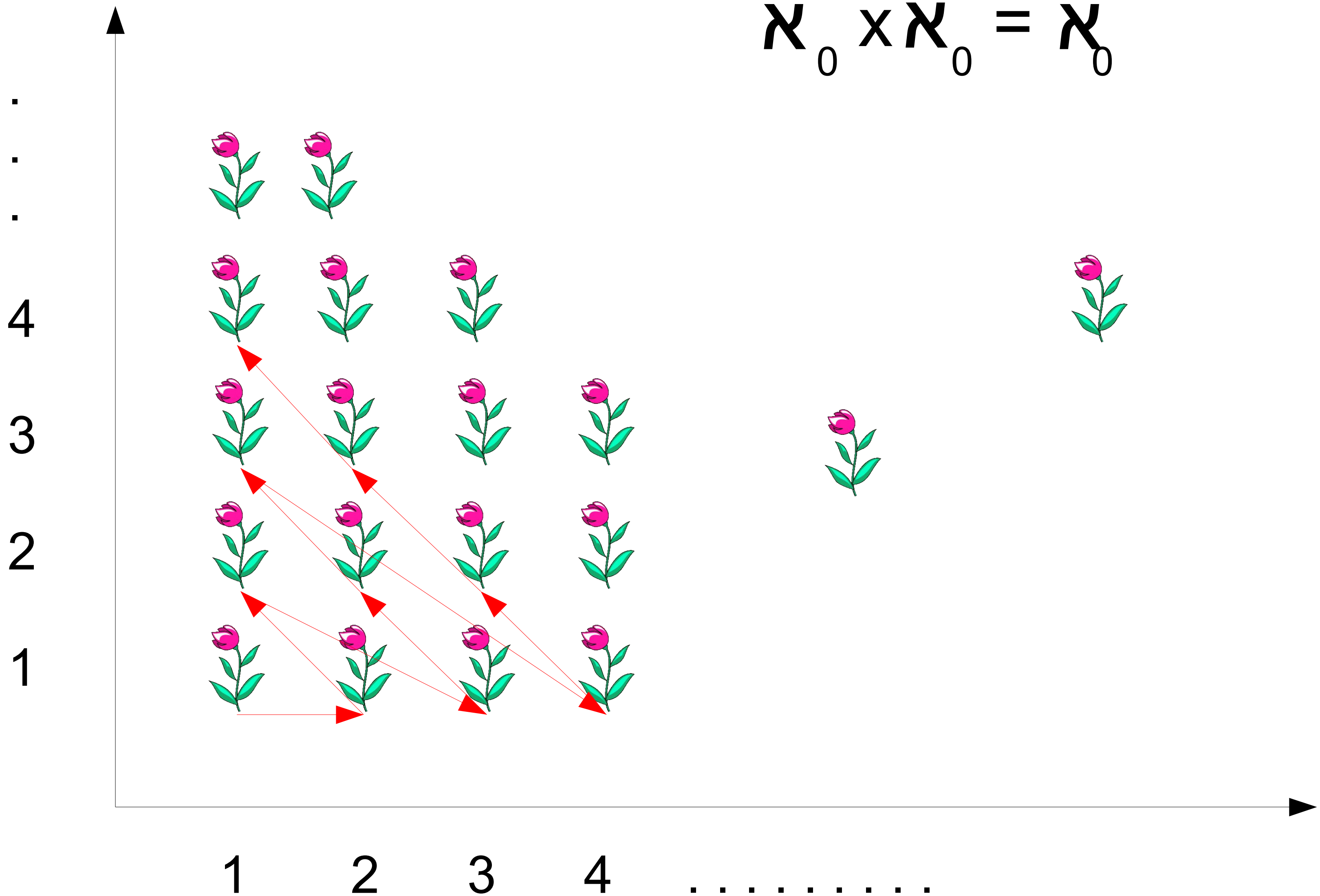
Rechnen mit $\aleph_0$

$\aleph_0 x \aleph_0 = ?$



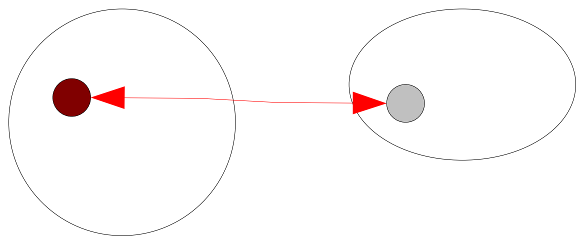
Rechnen mit $\aleph_0$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$



Endliche und unendliche Anzahlen

1

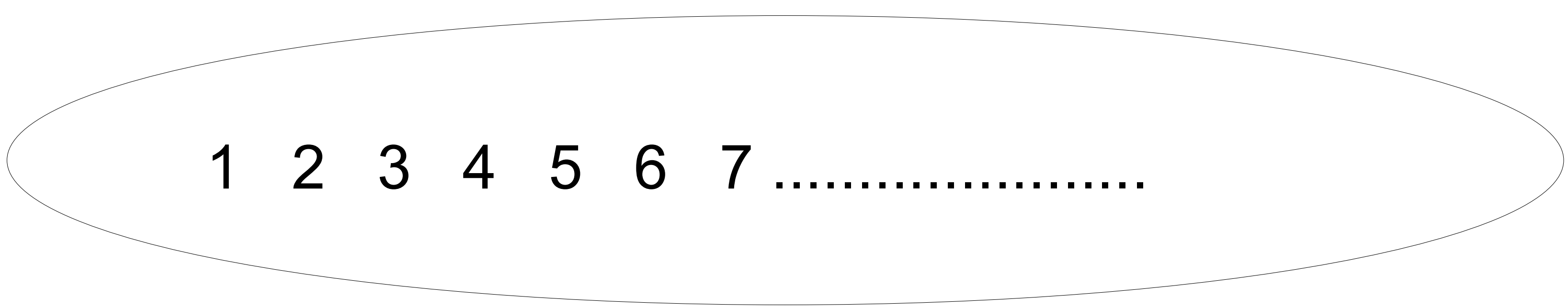


2

3

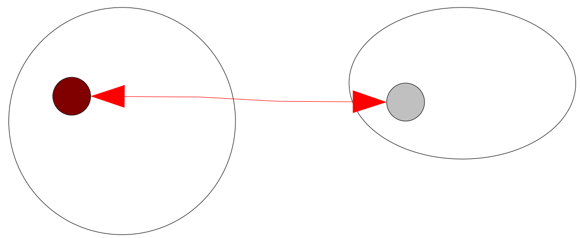
...

$\aleph_0$



Endliche und unendliche Anzahlen

1



2

3

...

$\aleph_0$ 1 2 3 4 5 6 7 ....

???

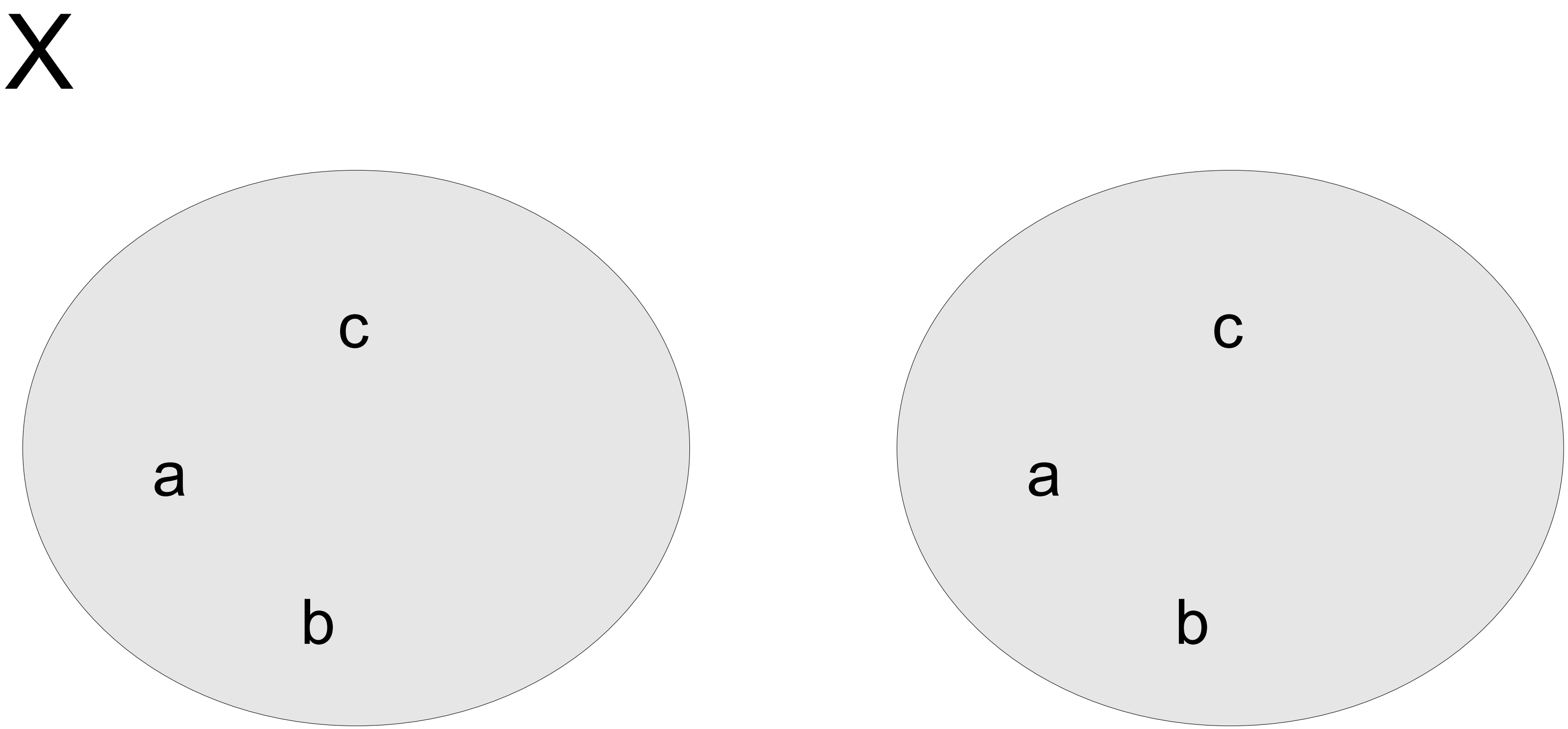
Satz von Cantor, 1873

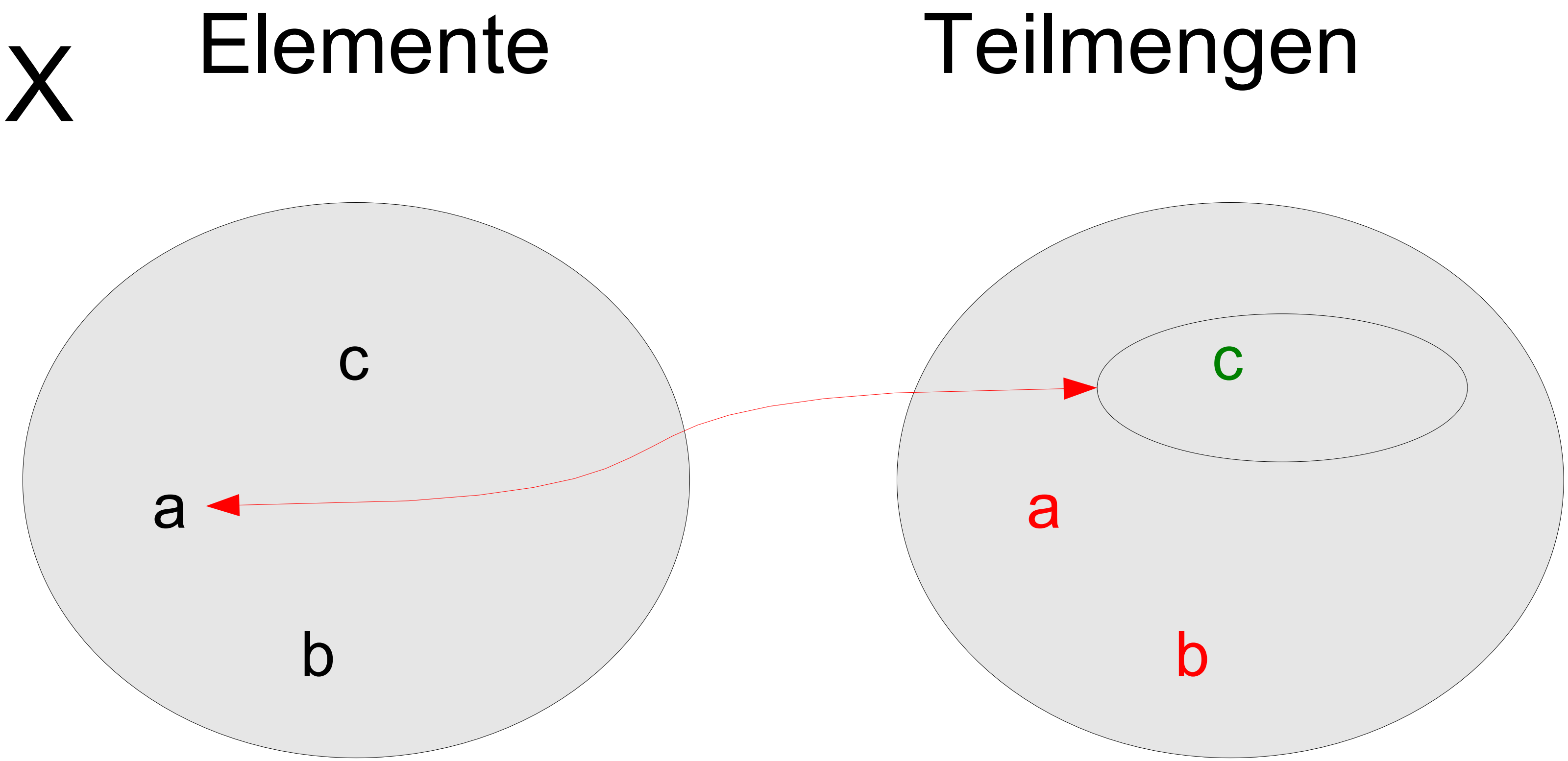
$$2^X > X$$

Satz von Cantor, 1873

$$2^X > X$$

Die Anzahl der Teilmengen von X ist größer als die Anzahl der Elemente von X


X
c
a
b
c
a
b

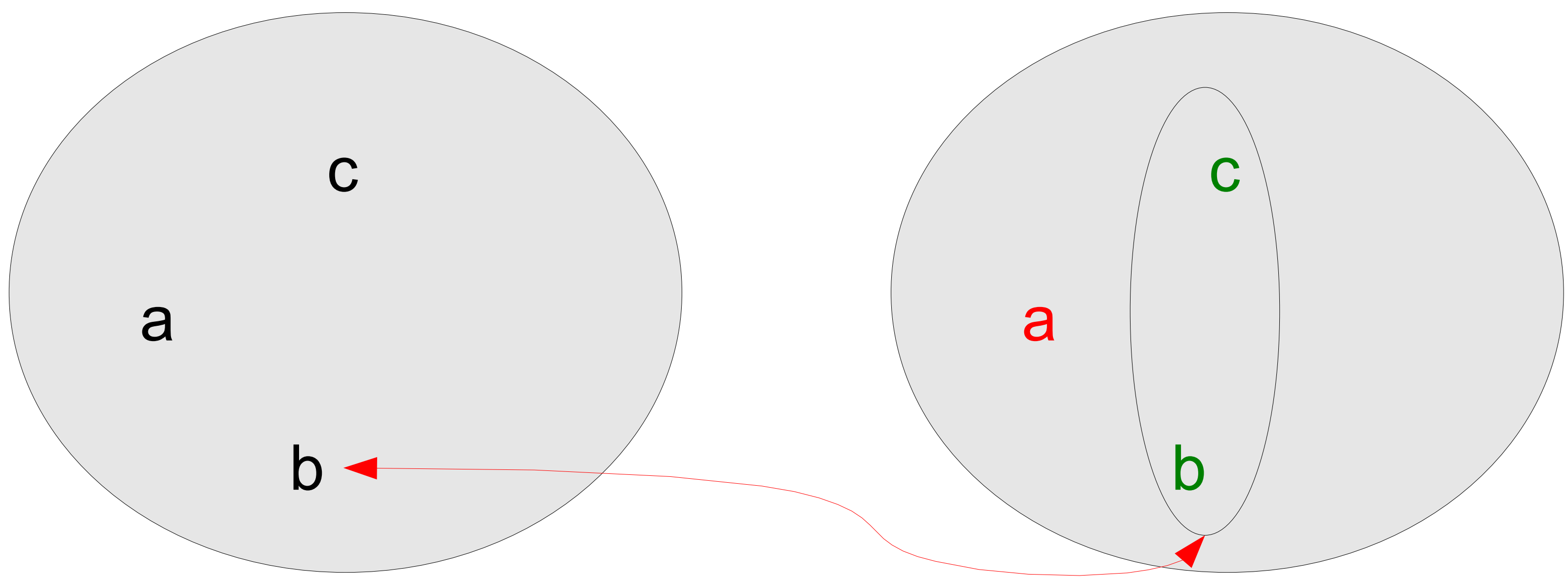


X
Elemente
Teilmengen
c
a
b
c
a
b

X

Elemente

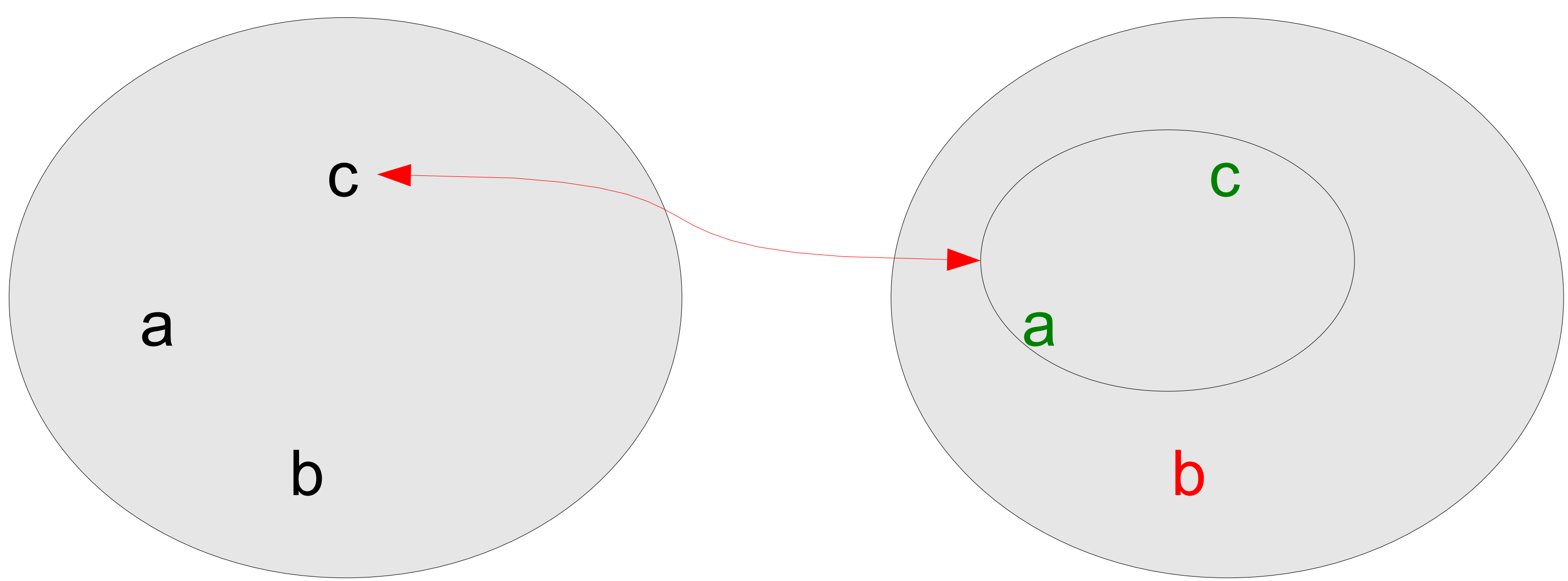
Teilmengen



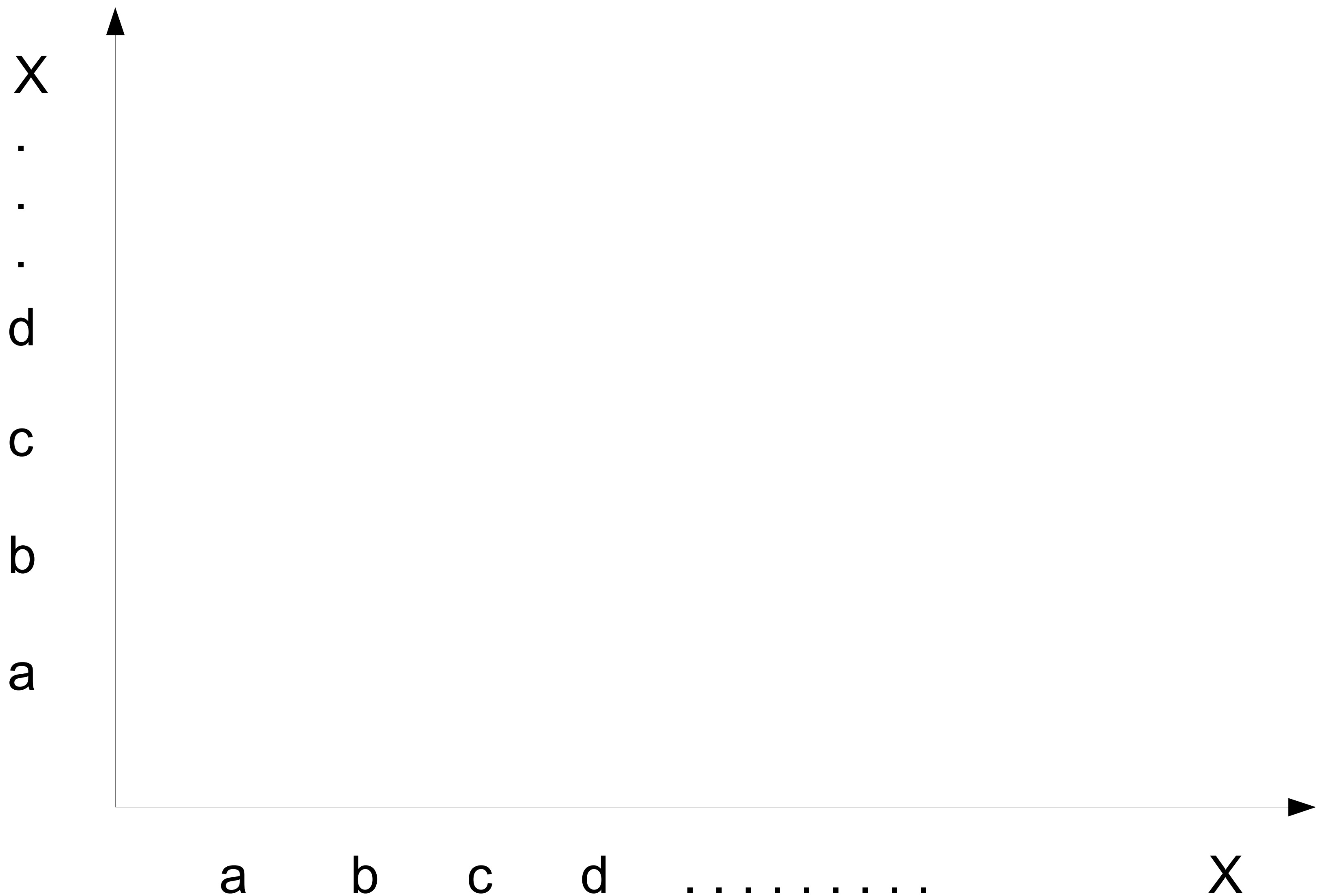
X

Elemente

Teilmengen

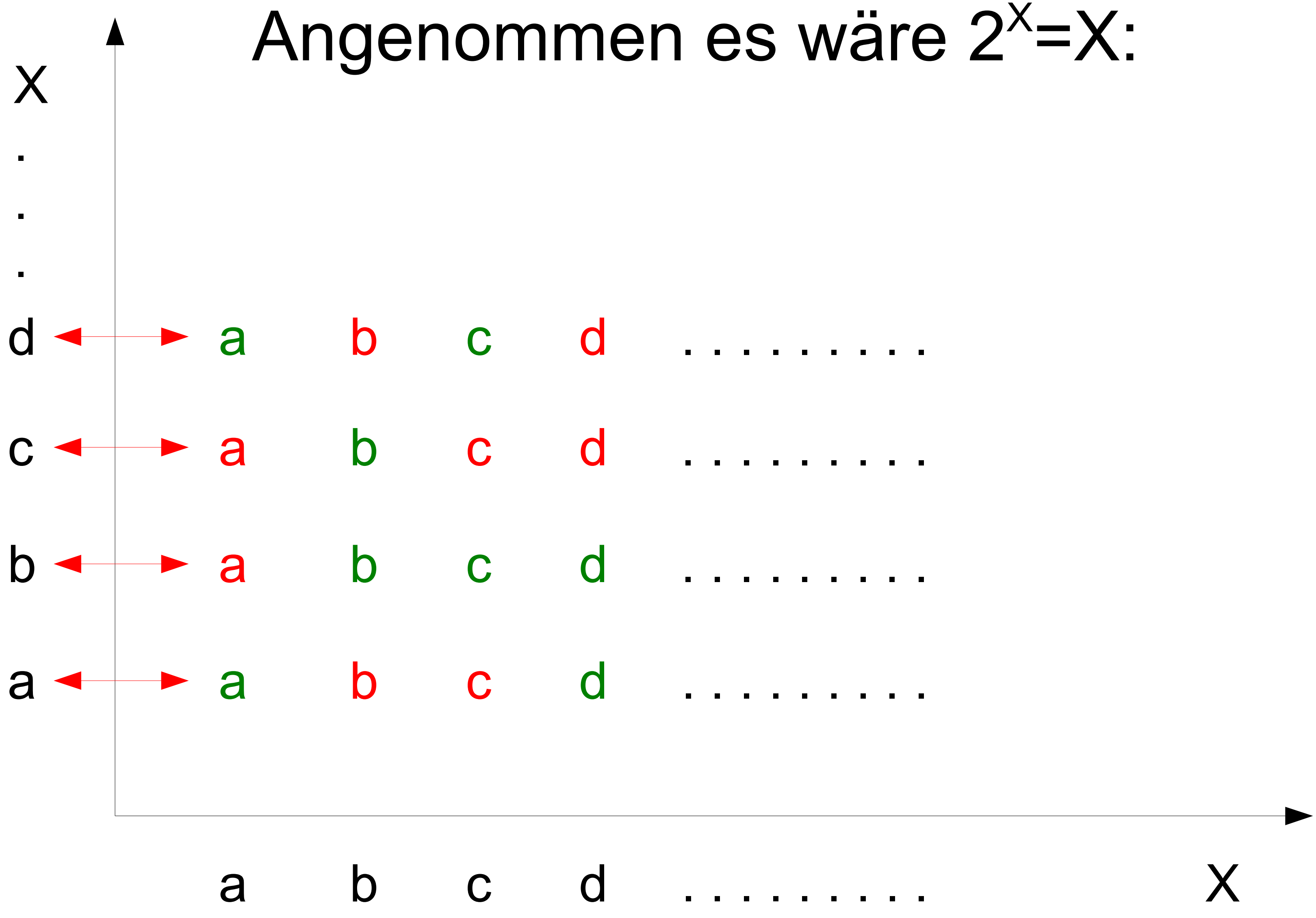


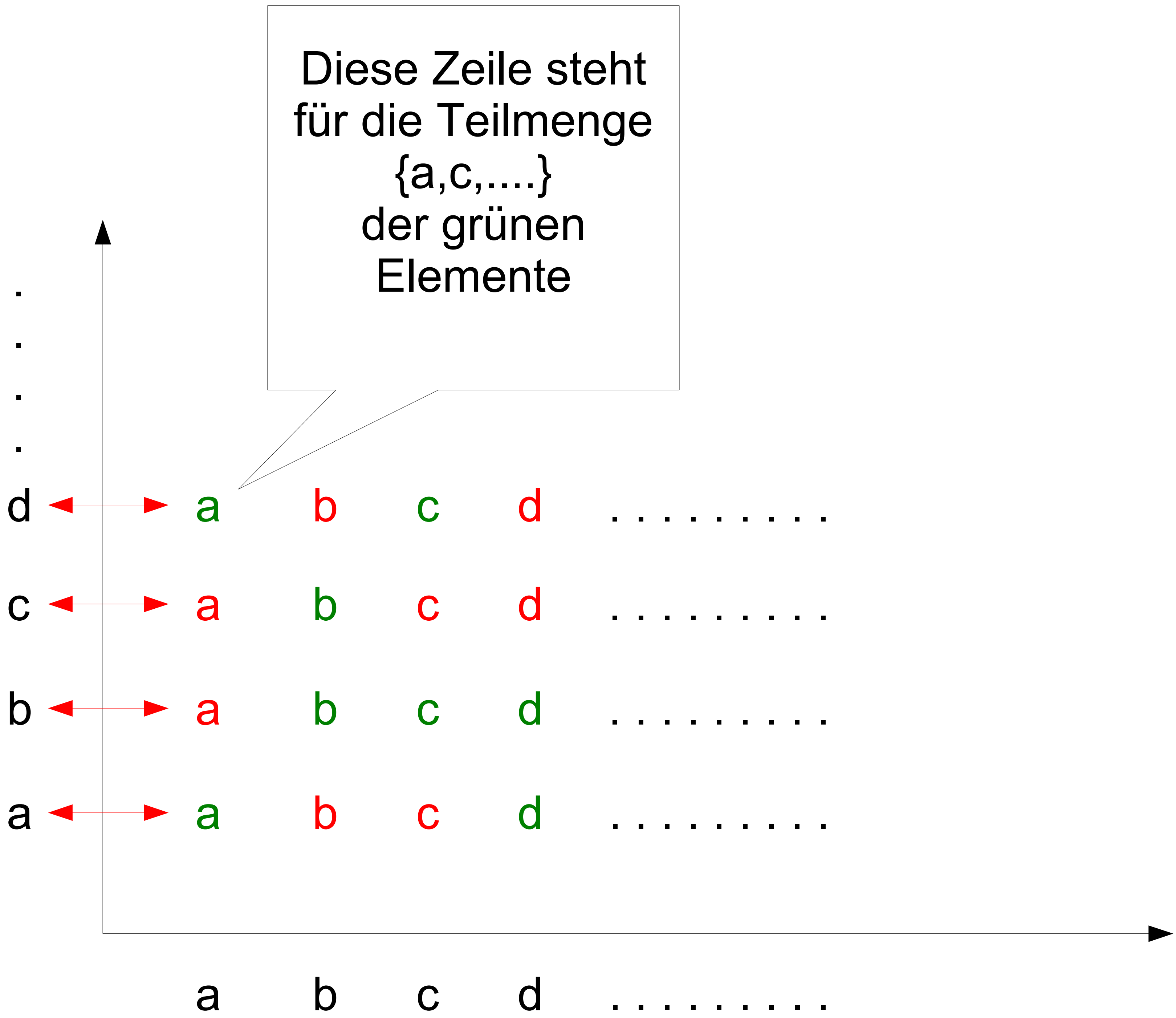
Der Beweis von $2^X > X$



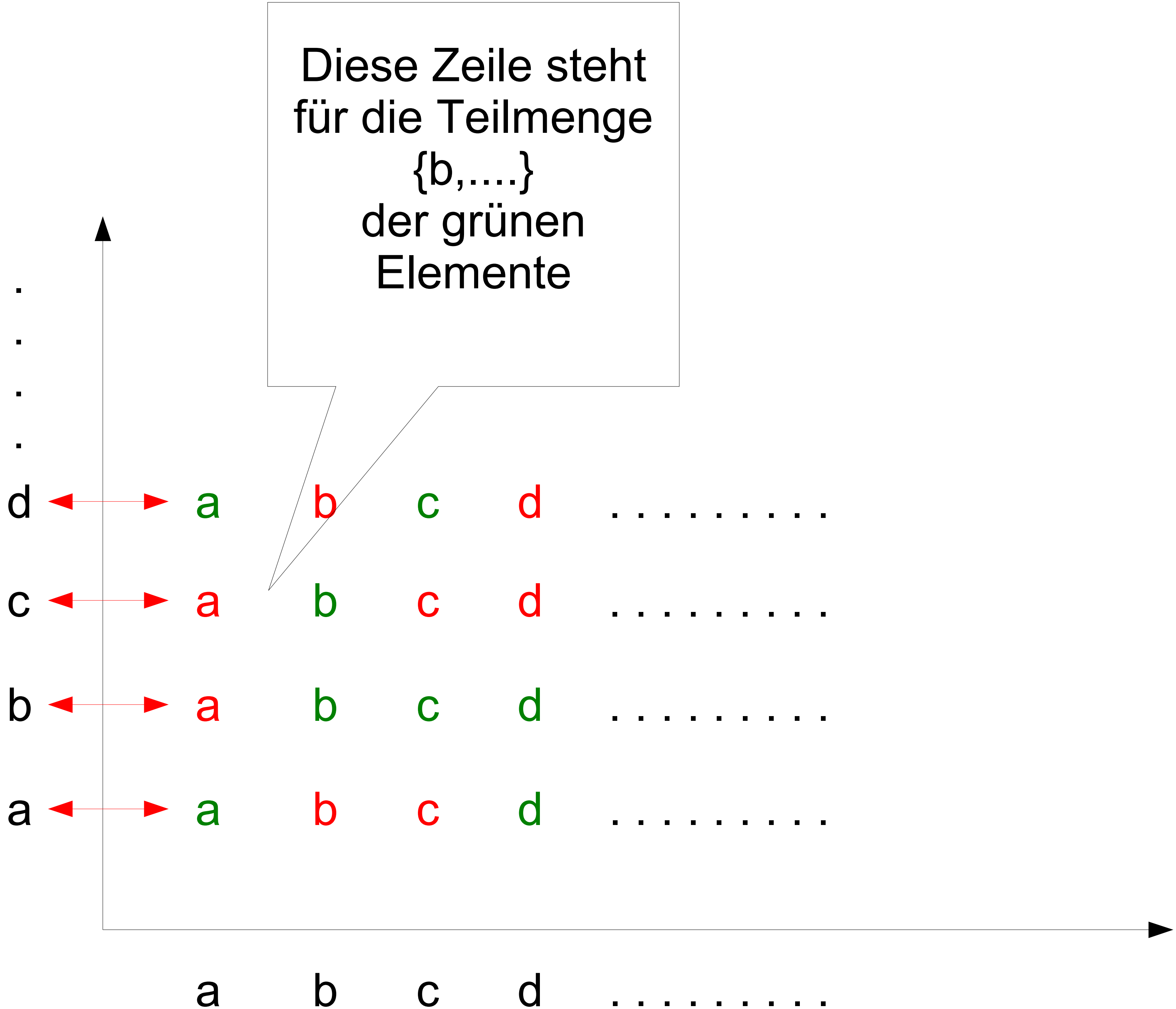
Der Beweis von $2^X > X$

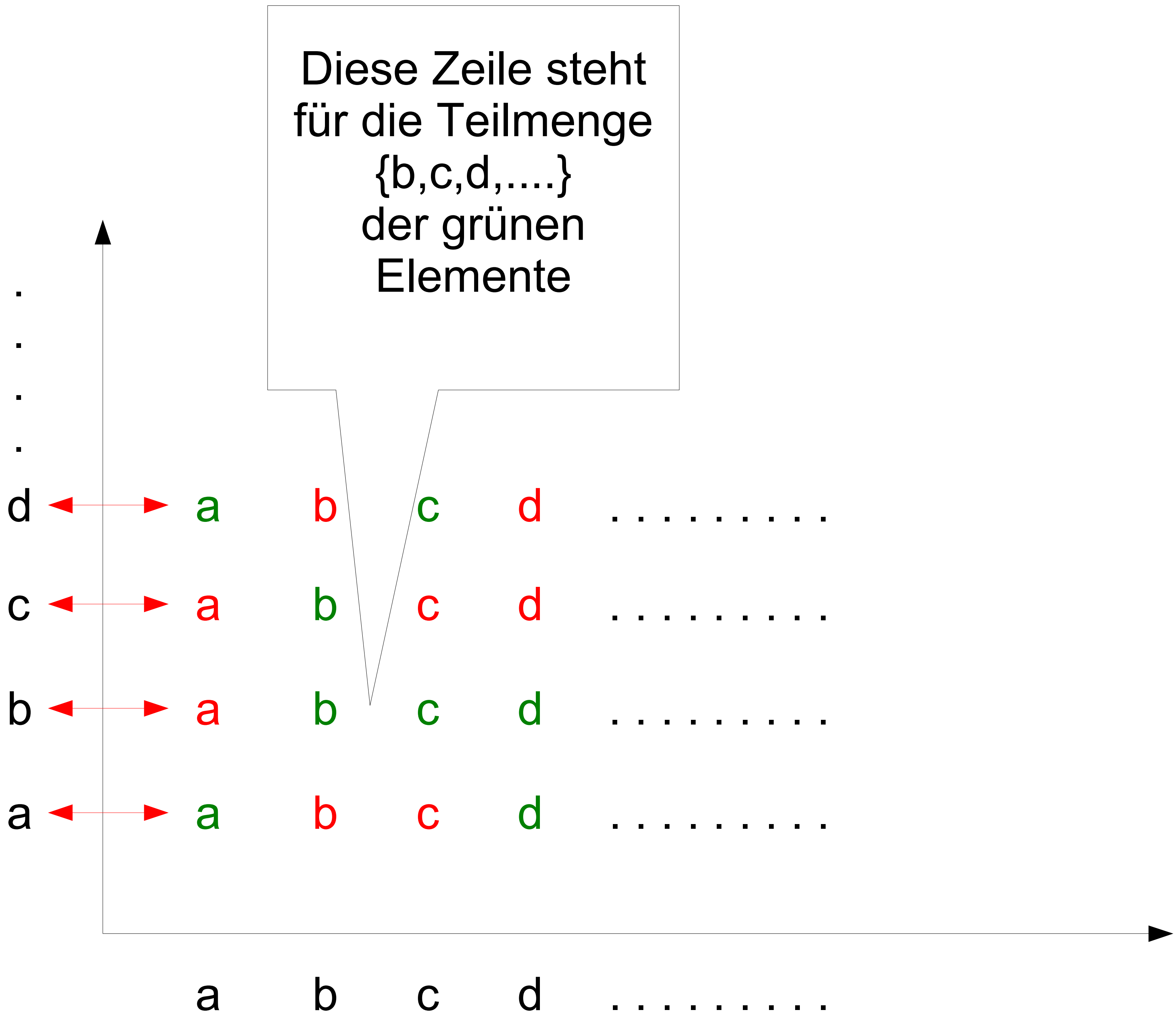
Angenommen es wäre $2^X = X$:

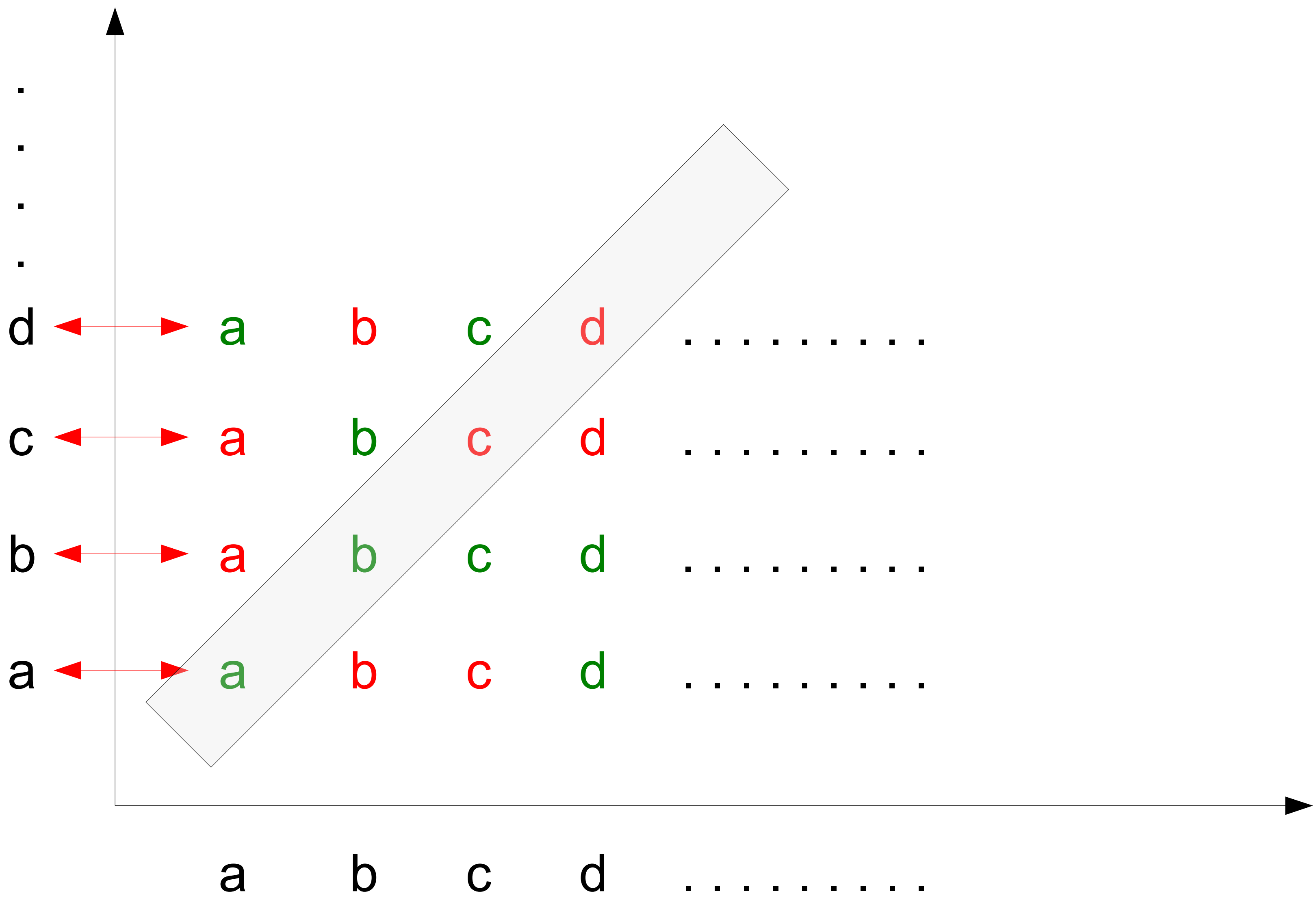




Diese Zeile steht für die Teilmenge {a,c,....} der grünen Elemente
.
.
.
.
d
a b c d . . . .
c
a b c d . . . .
b
a b c d . . . .
a
a b c d . . . .
a b c d . . . .

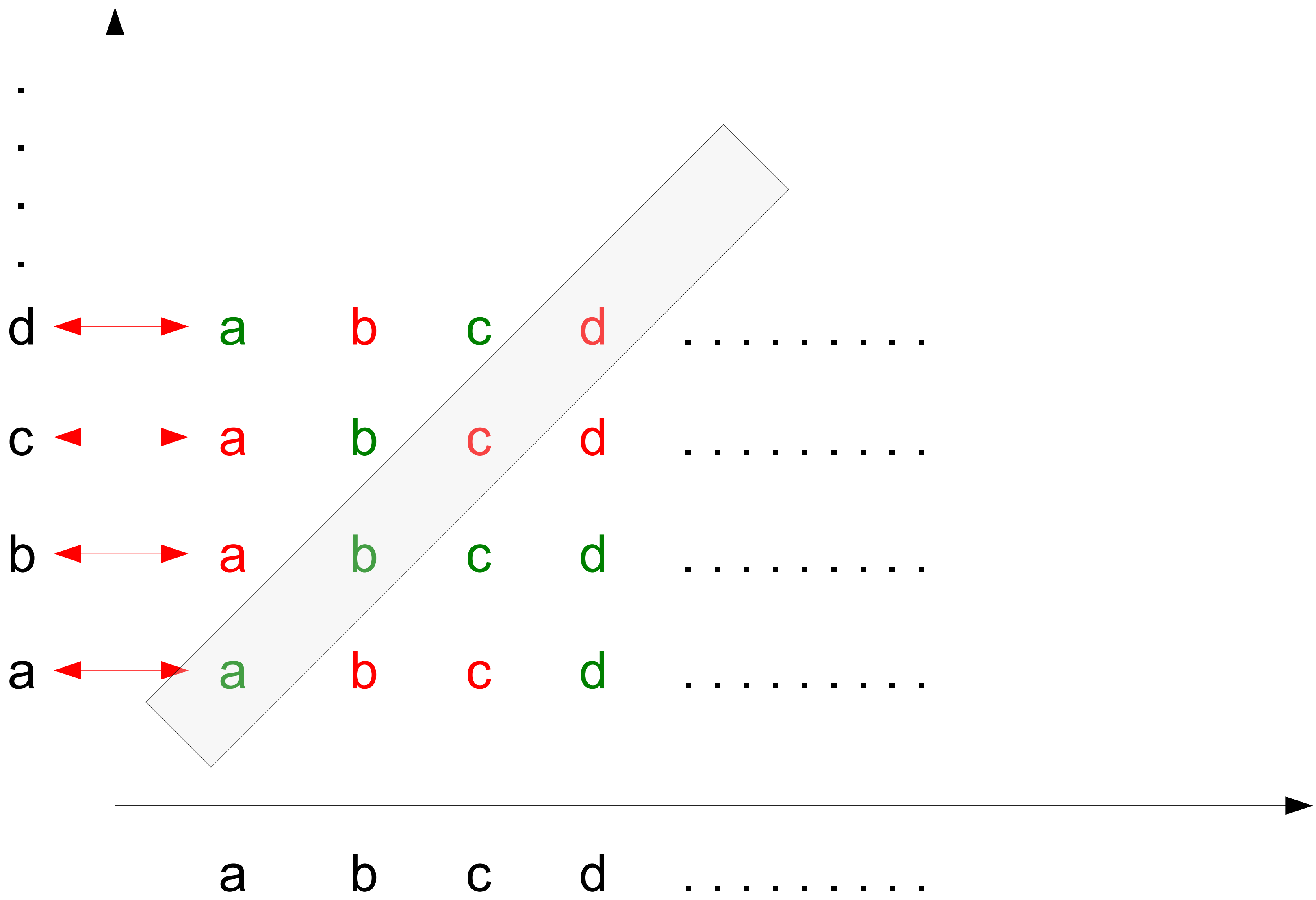

Diese Zeile steht für die Teilmenge {b,....} der grünen Elemente
d a b c d . . . .
c a b c d . . . .
b a b c d . . . .
a a b c d . . . .
a b c d . . . .


Diese Zeile steht für die Teilmenge {b,c,d,....} der grünen Elemente
d a b c d . . . .
c a b c d . . . .
b a b c d . . . .
a a b c d . . . .
a b c d . . . .



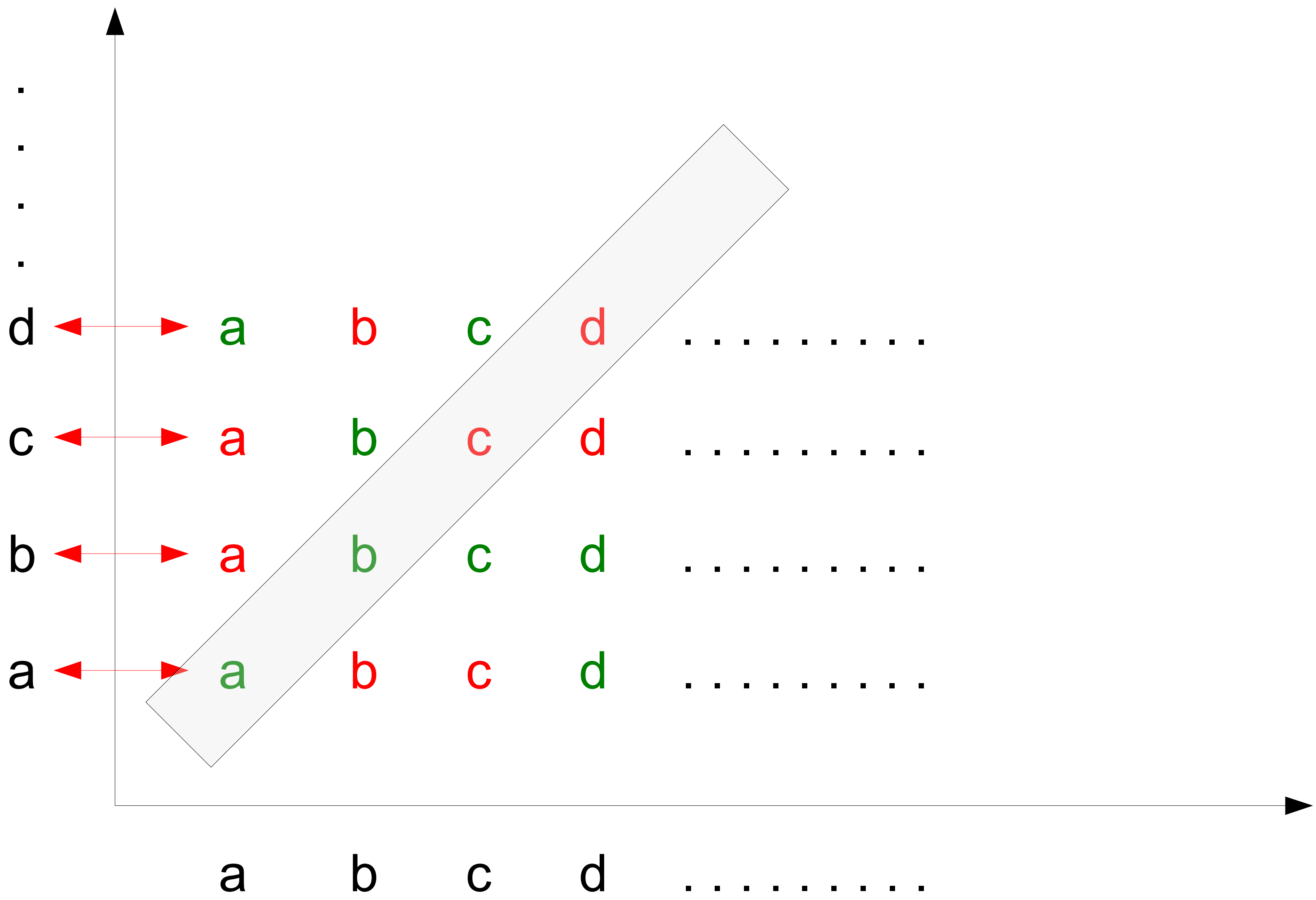
.
.
.
.
d
a b c d . . . .
c
a b c d . . . .
b
a b c d . . . .
a
a b c d . . . .
a b c d . . . .

a b c d . . . ist die **Diagonale**



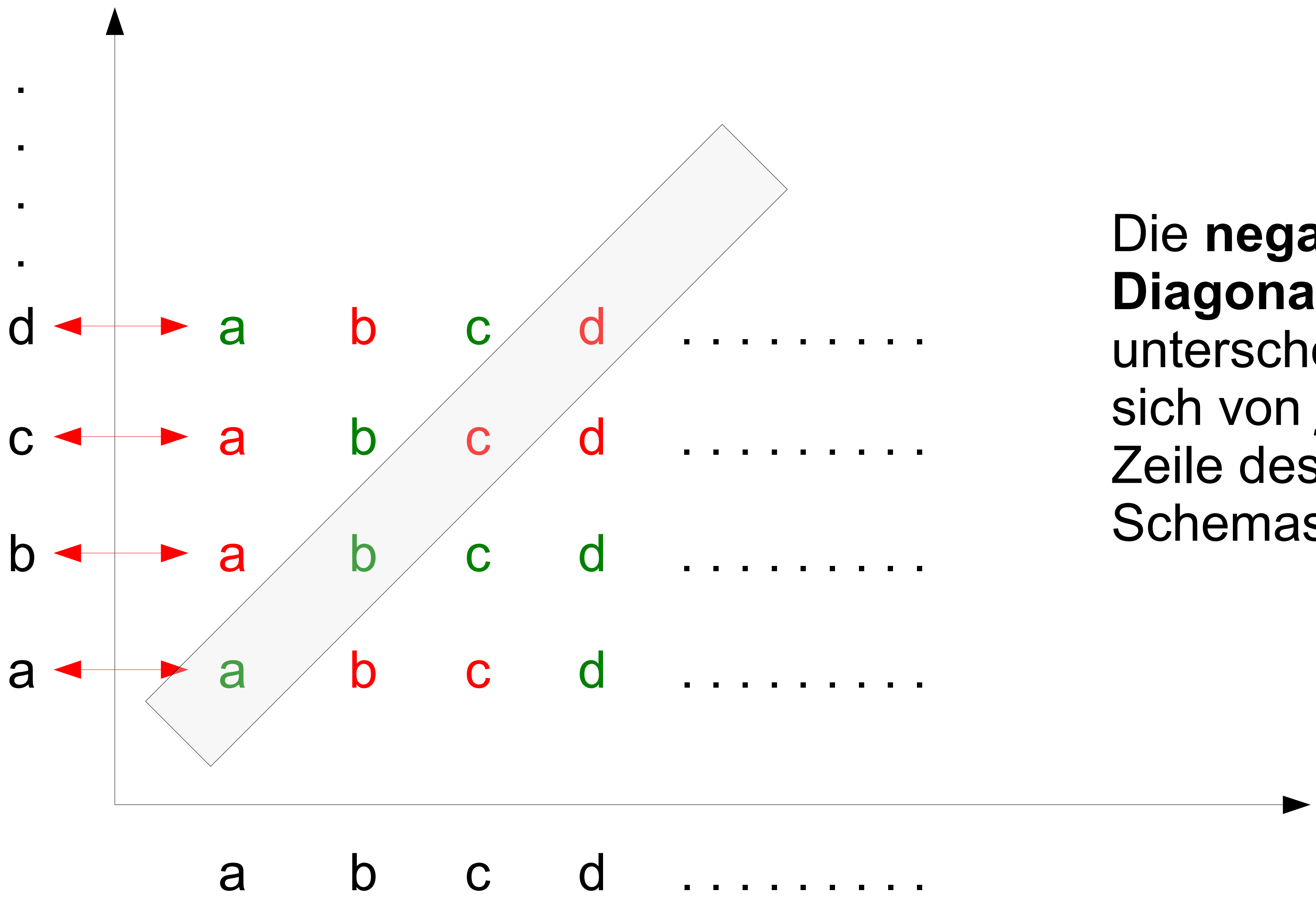
a b c d . . . ist die **Diagonale**

a b c d . . . ist die **negative Diagonale**



a b c d . . . ist die **Diagonale**

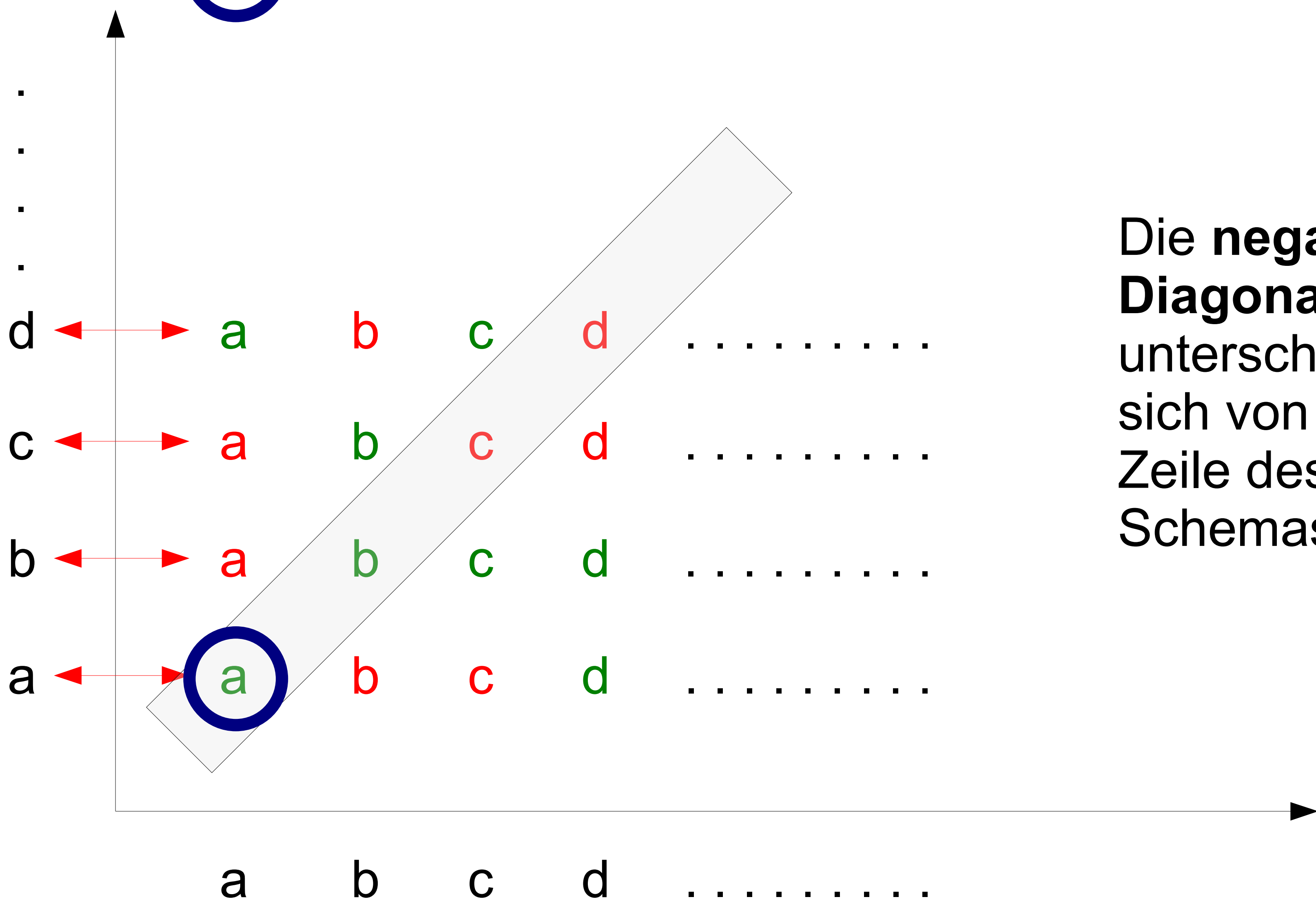
a b c d . . . ist die **negative Diagonale**



Die **negative Diagonale** unterscheidet sich von **jeder** Zeile des Schemas

a b c d . . . ist die **Diagonale**

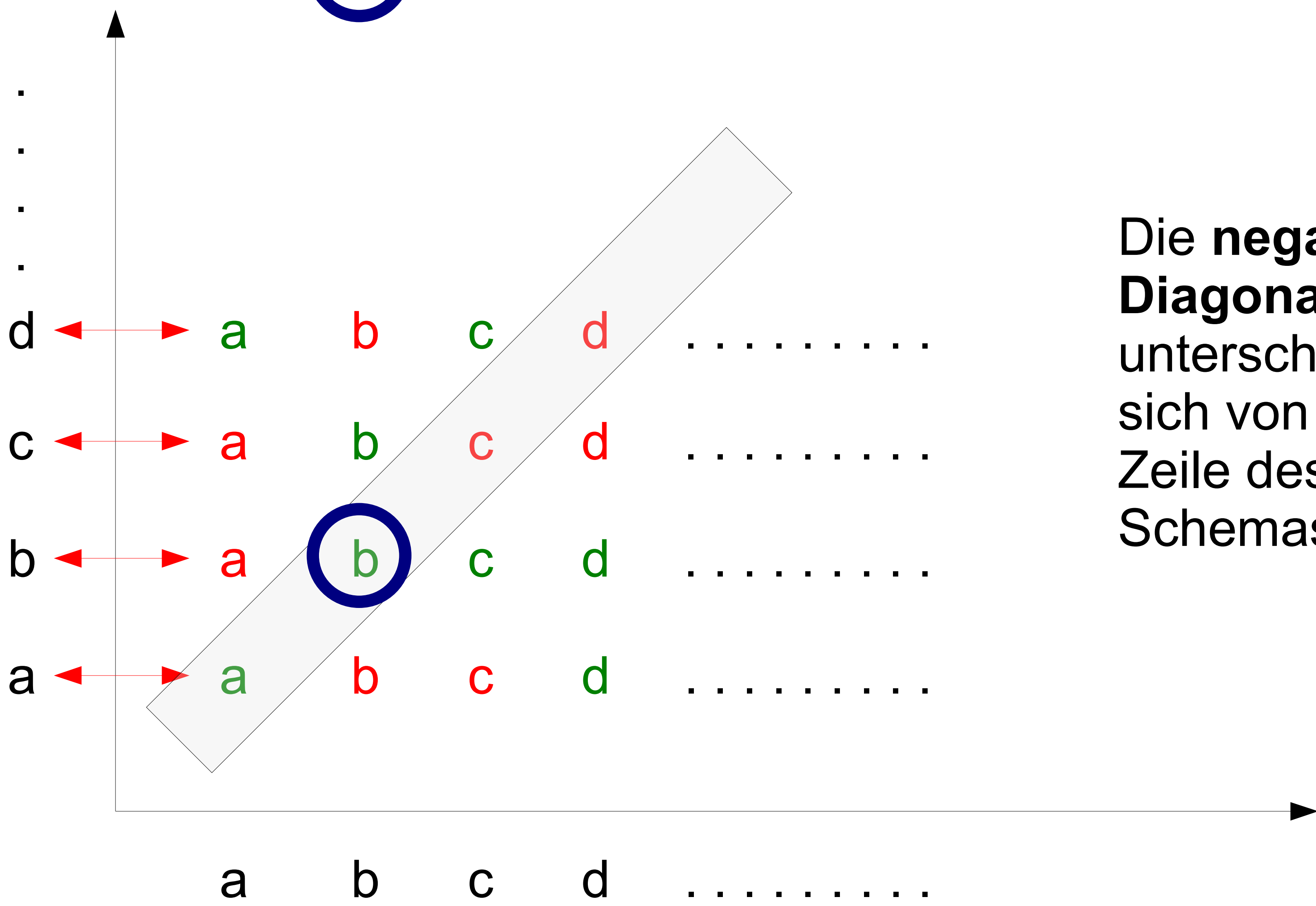
a b c d . . . ist die **negative Diagonale**



Die **negative Diagonale** unterscheidet sich von **jeder** Zeile des Schemas

a b c d . . . ist die **Diagonale**

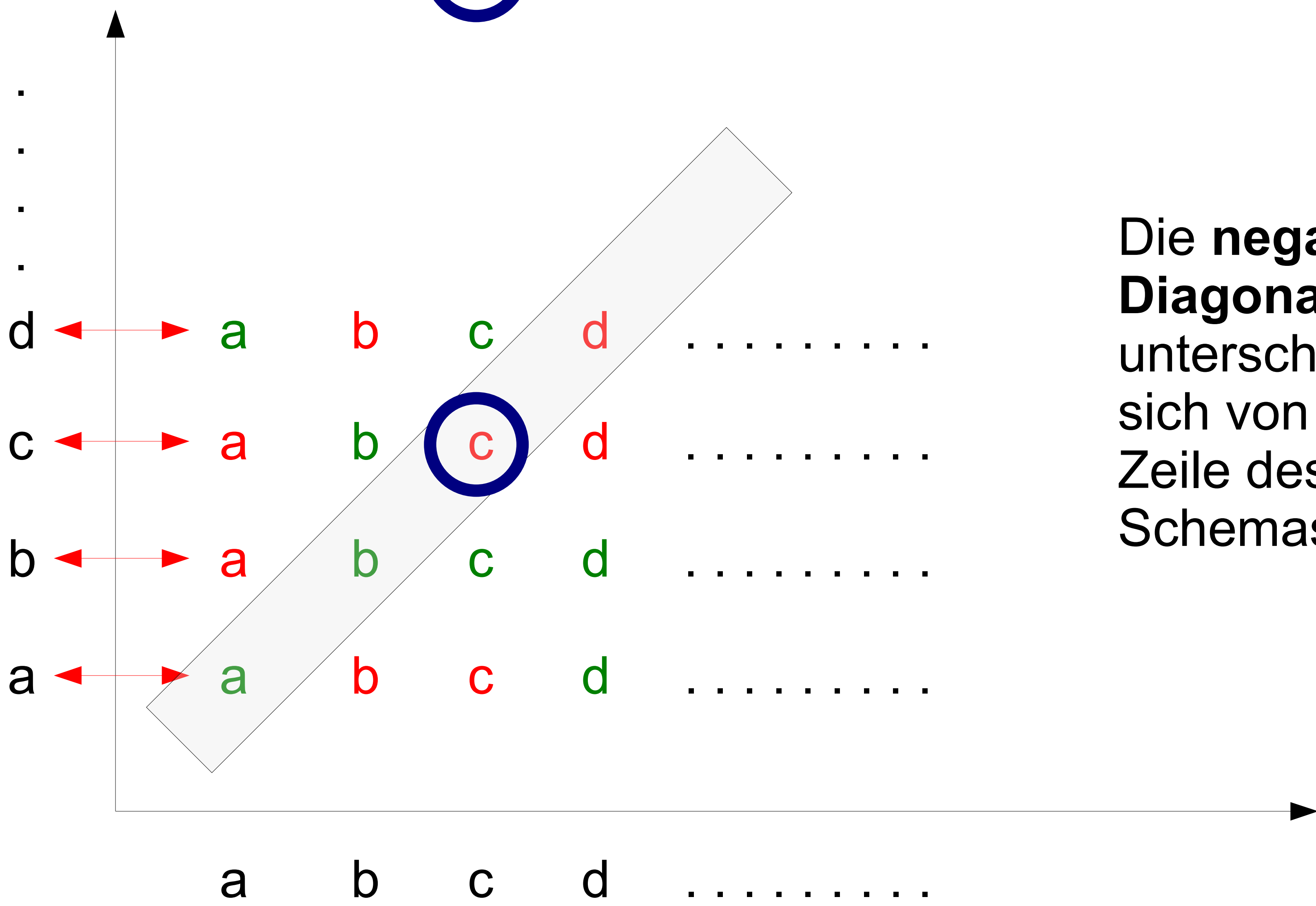
a b c d . . . ist die **negative Diagonale**



Die **negative Diagonale** unterscheidet sich von **jeder** Zeile des Schemas

a b c d . . . ist die **Diagonale**

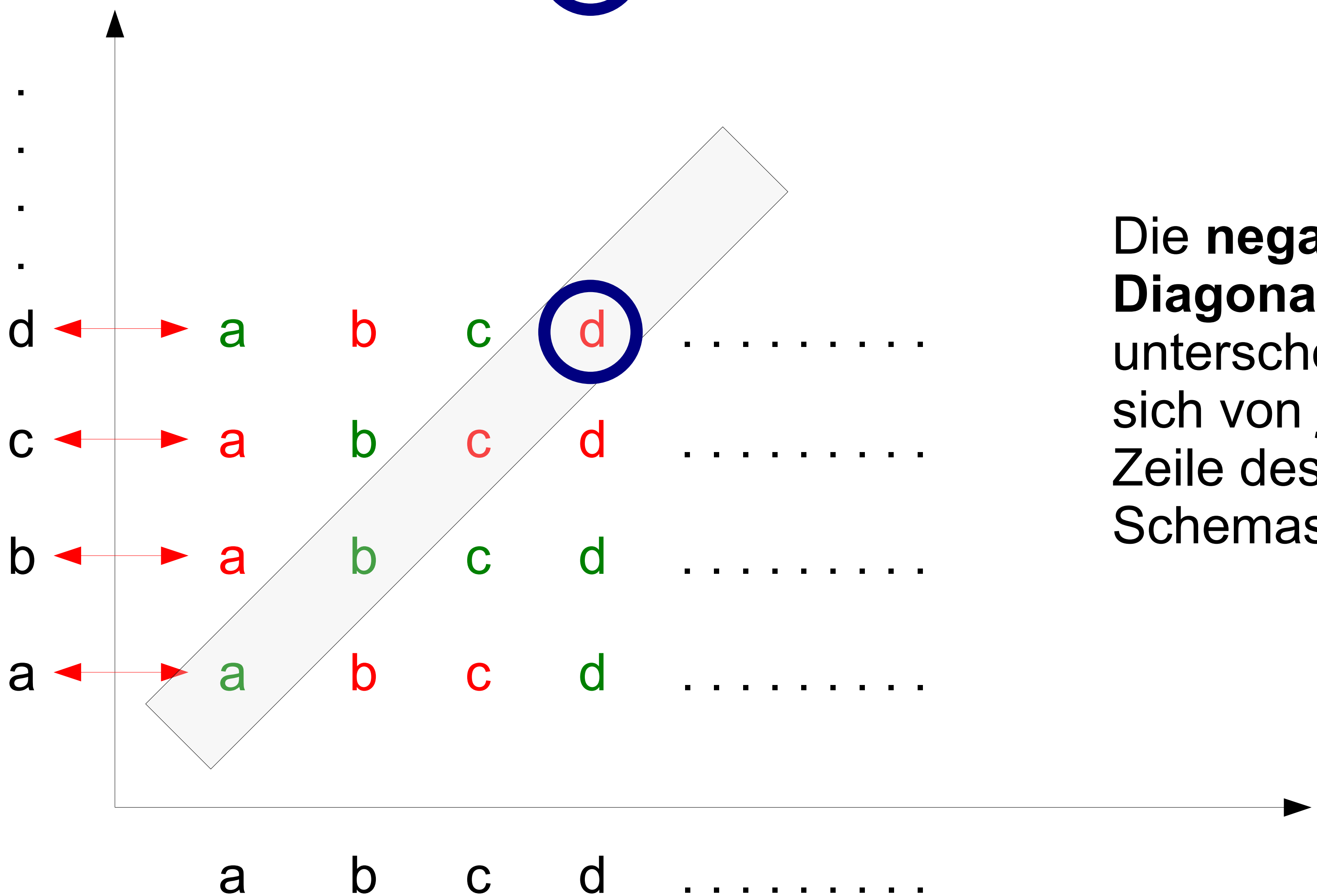
a b c d . . . ist die **negative Diagonale**



Die **negative Diagonale** unterscheidet sich von **jeder** Zeile des Schemas

a b c d . . . ist die **Diagonale**

a b c d . . ist die **negative Diagonale**

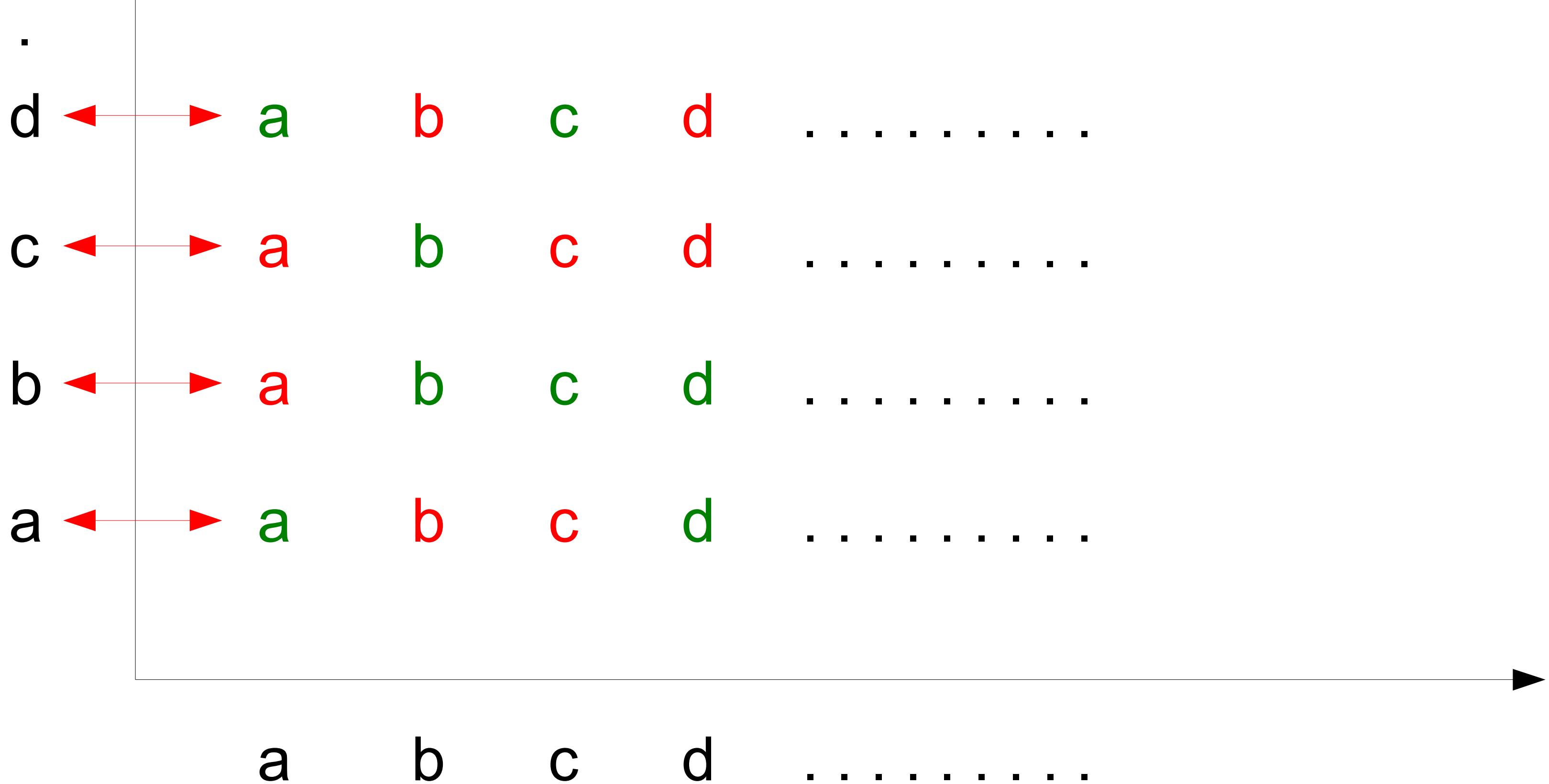


Die **negative Diagonale** unterscheidet sich von **jeder** Zeile des Schemas

a b c d . . . ist die **Diagonale**

a b c d . . . ist die **negative Diagonale**

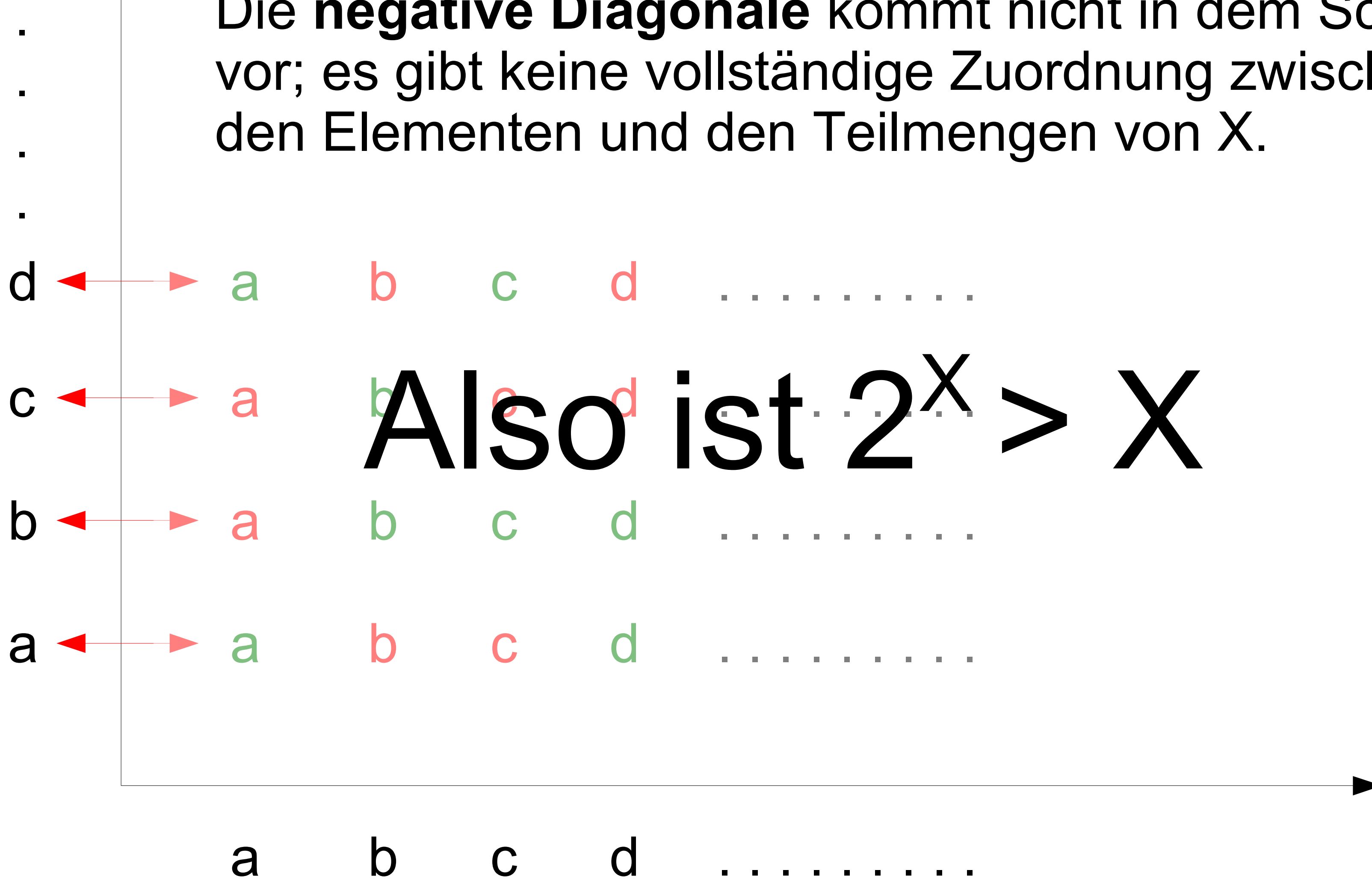
Die **negative Diagonale** kommt nicht in dem Schema vor; es gibt keine vollständige Zuordnung zwischen den Elementen und den Teilmengen von X.



a b c d . . . ist die **Diagonale**

a b c d . . . ist die **negative Diagonale**

Die **negative Diagonale** kommt nicht in dem Schema vor; es gibt keine vollständige Zuordnung zwischen den Elementen und den Teilmengen von X.

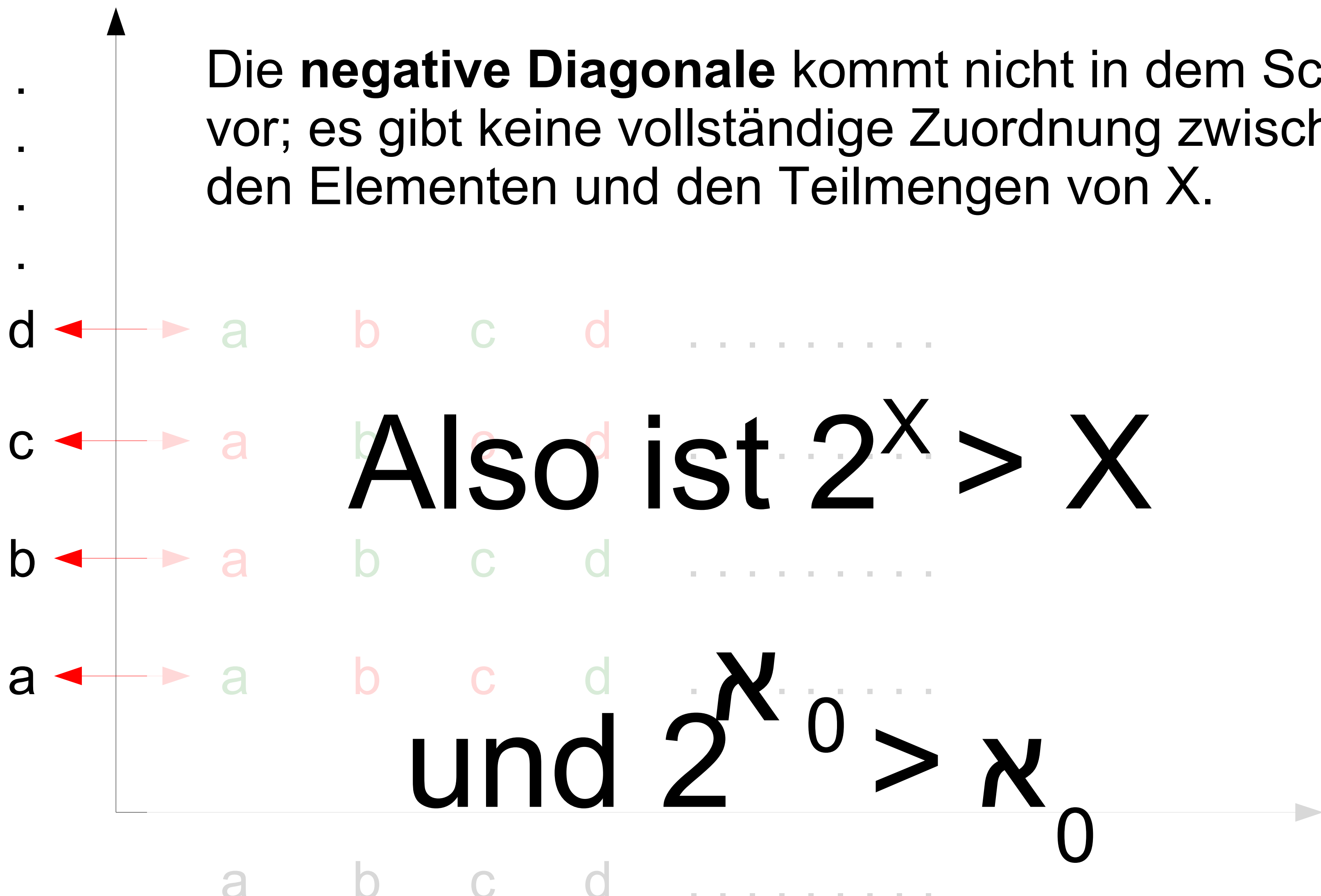


Also ist $2^X > X$

a b c d . . . ist die **Diagonale**

a b c d . . . ist die **negative Diagonale**

Die **negative Diagonale** kommt nicht in dem Schema vor; es gibt keine vollständige Zuordnung zwischen den Elementen und den Teilmengen von X.

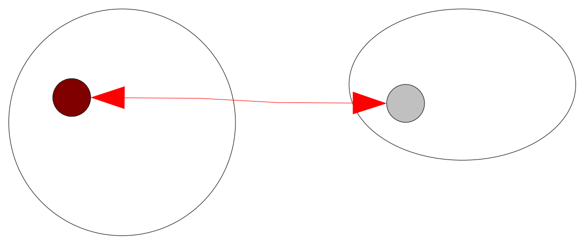


Also ist $2^X > X$

und $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

Endliche und unendliche Anzahlen

1



2

3

…

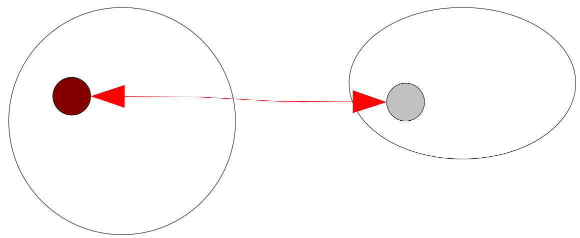
$\aleph_0$

1 2 3 4 5 6 7 ....

???

Endliche und unendliche Anzahlen

1



2

3

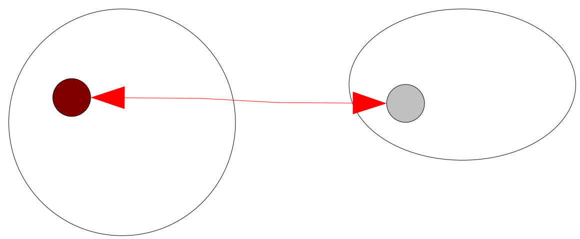
...

$\aleph_0$ 1 2 3 4 5 6 7 ....

...

$2^{\aleph_0}$

Endliche und unendliche Anzahlen



1

2

3

...

$\aleph_0$ 1 2 3 4 5 6 7 ....

...

$2^{\aleph_0}$ ist die Anzahl der Punkte auf einer Geraden:

Endliche und unendliche Anzahlen

1,2,3, ... , $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...

ist die Folge der Cantorschen Kardinalzahlzahlen

Endliche und unendliche Anzahlen

$1, 2, 3, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

ist die Folge der Cantorschen Kardinalzahlzahlen

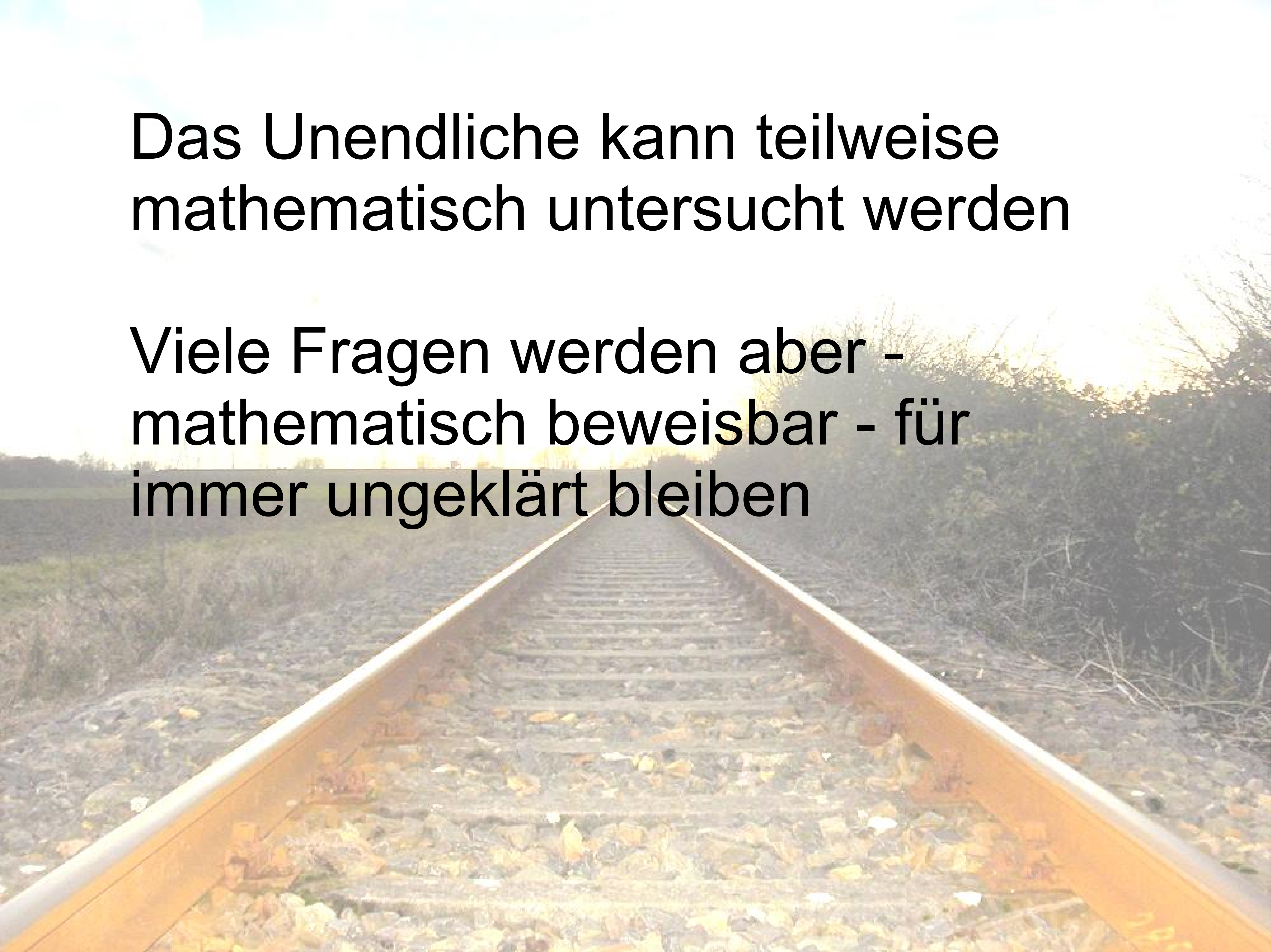
Georg Cantor vermutete:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Die Unentscheidbarkeit der Cantorschen Vermutung

Paul Cohen konstruierte 1963 zwei Strukturen, in den die Gesetze der Mengenlehre gelten. In der ersten gilt $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

in der zweiten gilt $2^{\aleph_0} = \aleph_2$


Das Unendliche kann teilweise mathematisch untersucht werden
Viele Fragen werden aber - mathematisch beweisbar - für immer ungeklärt bleiben


Vielen Dank für Ihr Interesse
Ihnen allen eine gute
(Wissenschafts-)Nacht