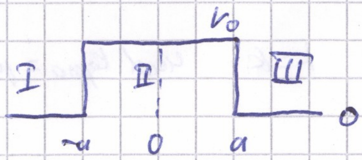
Daniel Ebenz
Dominik Guido Rhien
Marlon Brase

H3.3



a) SG:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + (V(x) - E)\varphi(x) = 0$$

Ansatz: $e^{i\lambda x}$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + V(x) - E = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \sqrt{(E - V(x))\frac{2m}{\hbar^2}}$$

Für $|x| \geq a$:

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{E\,2m/\hbar^2}$$

Für $|x| \geq a$:

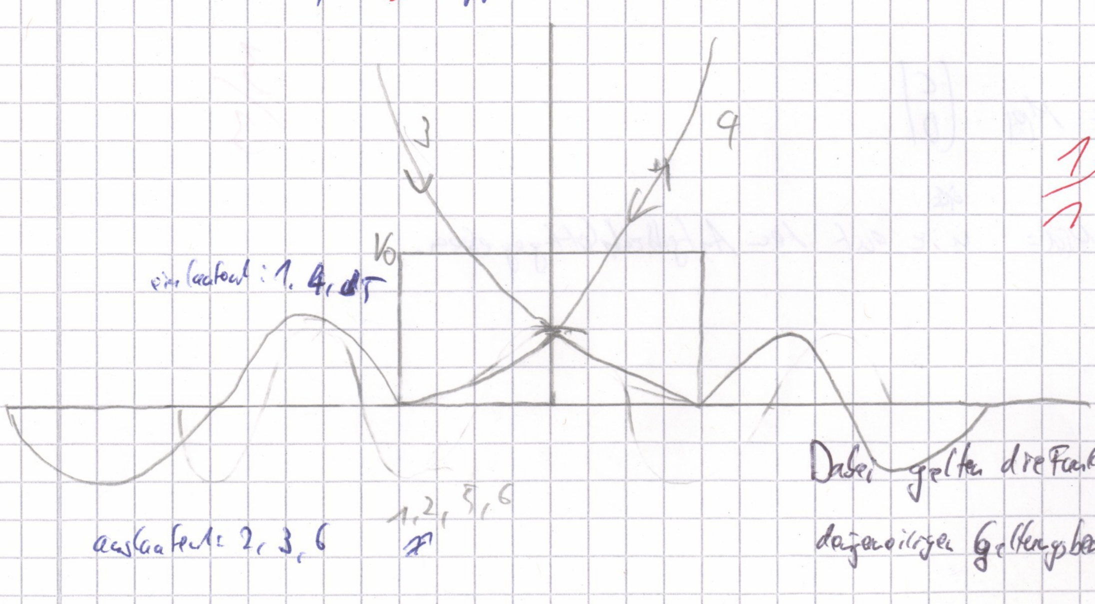
$$\lambda' = \pm\sqrt{(E - V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung ergibt sich als summe beider für den jeweiligen Bereich

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} & x \leq a \\ Ce^{-\lambda' x} + De^{\lambda x} & |x| < a \\ Fe^{i\lambda x} + Ge^{-i\lambda x} & x \geq a \end{cases}$$

$k = \lambda$; Ka ? kappa $= \lambda'$

1/1



Dabei gelten die Funktionen nur in dem jeweiligen Geltungsbereichen

b) stetige Differenzierbarkeit bedeutet i.F. $k = k$ und kappa $= \mu$

(i) $Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{\mu a} + De^{-\mu a}$

(ii) $ikAe^{-ika} - ikB = -\mu Ce^{\mu a} + D\mu e^{-\mu a}$

$\Rightarrow Ae^{-ika} = Ce^{\mu a} + De^{-\mu a} - Be^{ika}$

$Be^{ika} = Ce^{\mu a} - De^{-\mu a} - Ae^{-ika}$

<u>B:</u> $ik(e^{\mu a}C + De^{-\mu a} - Be^{ika}) - ikB^{ika} = -\mu Ce^{\mu a} + D\mu e^{-\mu a}$

$\Leftrightarrow -2ikBe^{ika} = (-1)(\mu + ik)Ce^{\mu a} + (-ik + \mu)De^{-\mu a}$

$\Leftrightarrow B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{ik} + 1\right)Ce^{\mu a - ika} + \left(1 - \frac{\mu}{ik}\right)De^{-\mu a - ika}\right]$

$\Leftrightarrow B = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{i\mu}{k}\right)Ce^{\mu a - ika} + \left(1 + \frac{i\mu}{k}\right)De^{-\mu a - ika}\right]$ (*)

<u>A:</u> $2ikAe^{-ika} + ik(-Ce^{\mu a} - De^{-\mu a}) = -\mu Ce^{\mu a} + D\mu e^{-\mu a}$

$\Leftrightarrow 2ikA = (ik - \mu)Ce^{\mu a + ika} + (\mu + ik)De^{-\mu a + ika}$

$\Leftrightarrow A = \left(1 + \frac{i\mu}{k}\right)Ce^{\mu a + ika} + \left(1 - \frac{i\mu}{k}\right)De^{-\mu a + ika}$ (**)

Aus (*) und (**) kann man das ganze als Matrix schreiben, wenn man die Terme auf d. rechten Seite als Matrixmultiplikation zwischen einem Zeilen Vektor und einem Spalten vektor für A / B annimmt

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M_{(a)} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Mit $M(a) =$ wie auf dem Aufgabenblatt gegeben.

3/3

c) Offensichtlich liegt zwischen $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$ folgende Beziehung vor:

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = M(a)\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix} \quad ✓ \qquad \begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix} = M(-a)\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix} \quad ✓$$

$$\Rightarrow M^{-1}(-a)\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix} \quad ✓$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = M(a)\, M^{-1}(-a) \cancel{\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}$$

3/4

Dabei ist $M^{-1}(-a)$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(1-\frac{ik}{\mu}\right)e^{\mu a+ika} & \left(1+\frac{ik}{\mu}\right)e^{\mu a-ika} \\ \left(1+\frac{ik}{\mu}\right)e^{-\mu a-ika} & \left(1-\frac{ik}{\mu}\right)e^{-\mu a-ika} \end{pmatrix}$$

Wenn man die Matrixmultiplikation ausführt und die ~~Abk~~ Definition von sinh / cosh ~~[illegible]~~ verwendet, erhält man die gesuchte Matrix.

(Um den Rahmen der Aufgabe nicht zu sprengen führe ich die Rechnung hier nicht explizit aus.

d) ~~B~~ Der Koeffizient G ist 0, da dieser die Welle, die von rechts auf das Potential trifft beschreibt.

Im beschriebenen Fall gibt es aber nur die reflektierte Welle (am Potential) von ~~[illegible]~~ existiert ~~d~~ diese Welle nicht und G ist 0.

Der Transmissionskoeffizient bezeichnet den Quotienten von den Amplituden d. transmittierten und einlaufenden Welle und gibt somit den ~~Tra~~ transmittierten Anteil an.

Das Betragsquadrat d. transmittierten Anteil $|T(E)|$ gibt also die W.keit an ~~[illegible]~~. Daher ist die Bezeichnung Transmissionswkeit sinngemäß.

$\Rightarrow R(E) = \frac{B}{A}$ $\quad |R(E)|^2$ = Reflexionskoeffizient.

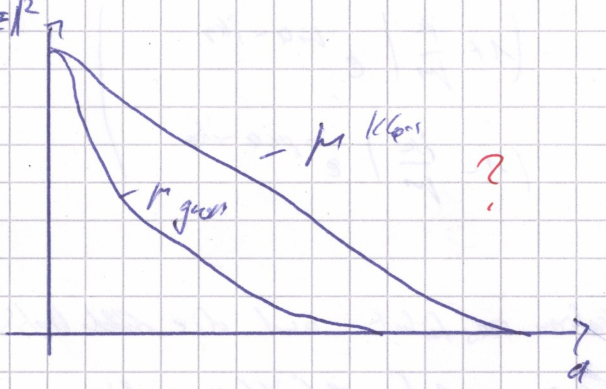
1/1

e) Aus der Matrix aus c ergibt sich:

$$A = \left(\cosh(2\mu a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\mu a)\right) e^{2ika} F$$

$$\Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh(2\mu a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\mu a)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|T(E)|^2} = \frac{1}{\left|\cosh(2\mu a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\mu a)\right|^2} \overset{\text{Wolfram alpha}}{=} \frac{1}{1 + \left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh^2(2\mu a)}$$



gut

2/2

$\Rightarrow$ Je stärker die Dämpfung desto stärker nimmt die Amplitude ab.

f) $$|T(E)|^2 + |R(E)|^2 \overset{!}{=} 1$$

$$T(E) = \frac{e^{-2ik}}{\cosh(2\mu a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\mu a)}$$

$$R(E) = \frac{B}{A} \qquad B = F\left(-\frac{i\eta}{2}\right)\sinh(2\mu a)$$

$$\Rightarrow R(E) \; \frac{\sinh(2\mu a)\left(-\frac{i\eta}{2}\right)}{\cosh(2\mu a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\mu a)} e^{-2ika}$$

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh(2\mu a)}$$

$$|R(E)|^2 = \frac{\frac{\eta^2}{4}\sinh^2(2\mu a)}{1 + \left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh(2\mu a)}$$

f) $|T(E)|^2 + |R(E)|^2 = \dfrac{1+\frac{y^2}{4}\sinh^2(2\mu a)}{1+\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh^2(2\mu a)}$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{4} = 1+\dfrac{\varepsilon^2}{4}$; $\varepsilon^2 = \left(\dfrac{\mu}{k}-\dfrac{k}{\mu}\right)^2$

$\Rightarrow |T(E)|^2 + |R(E)|^2 = 1$

Diese Identität resultiert aus d. Kontinuität und d. einfallenden Wellen und bedeutet, dass die W.keit in reflektierte und transmittierte Welle aufgeteilt wird, dies ergibt Sinn und zeigt, dass das Teilchen sich irgendwo befindet.

2/2

g)

$|T(E)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh^2(2\mu a)}$

$\sinh = \frac{e^x}{2}$ für $x \gg 1$ was hier gegeben ist

$\Rightarrow \left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{-1} 4\, e^{-4\mu a} = |T(E)|^2$

$\Leftrightarrow |T(E)|^2 = \underbrace{\dfrac{16(\mu k)^2}{(\mu^2+k^2)^2}}_{\alpha} e^{-4\mu a}$

$= \exp(-4\mu a + \ln(\alpha))$

$\rightarrow$ μ ist eine Wurzel, nach Aufgabenstellung kann $\ln$ gegenüber der Wurzel vernachlässigt werden.

$\Rightarrow |T(E)|^2 \simeq e^{-4\mu a} = e^{-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}}$ qed

2/2

H. 3.3. 14/15

Insgesamt: ~~35~~ 33 / 38