FONCTIONS ENTIÈRES TOTALES EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

par

David ADAM & Michael WELTER

Résumé. — En 1968, Fridman a montré qu'une fonction f entière totale sur $\mathbb{C}$ et telle que $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < \ln(1+e^{-1})$ est un polynôme. Récemment, la borne $\ln(1+e^{-1})$ a été améliorée en $\ln 2$ par le second auteur. Nous introduisons ici une notion de fonction entière totale en caractéristique finie. Nous présentons un analogue en caractéristique finie du théorème de Fridman-Welter basé sur cette notion. Divers H-analogues de ce résultat sont aussi considérés.

1. Introduction

En 1915, Pólya montra le

Théorème 1. — [**17**] *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \textit{ et } \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|f|_r}{r} < \ln 2, \textit{ où } |f|_r = \sup_{|z|\le r} |f(z)|.$$

Alors, f est un polynôme. De plus, la borne $\ln 2$ est optimale.

Fridman obtint le résultat suivant

Théorème 2. — [**11**, Theorem 6] *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < \ln(1+e^{-1})$.

Alors, f est un polynôme.

Ce résultat fut amélioré par le second auteur. Dans [**21**], il montre le

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R58.

Les auteurs remercient l'arbitre anonyme pour sa lecture attentive et ses remarques pertinentes qui ont permis d'amliorer de manière substantielle cet article.

Théorème 3. — [**21**, Corollary 3.3] *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln |f|_r)}{r} < \ln 2$.

Alors, f est un polynôme.

De même, si l'on considère des fonctions à valeurs entières entières sur $\mathbb{Z}$, on a le

Théorème 4. — [**21**, Theorem 3.4] *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln |f|_r)}{r} < \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Alors, f est un polynôme.

De plus une fonction entière non-polynomiale f à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ telle que $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln |f|_r)}{r} < 2.638$ est construite dans [**22**]. En 1995, Car a montré un analogue du théorème 1 en caractéristique finie (voir [**6**, Theorem IV.9]). Dans [**9**], Delamette a amélioré le résultat de Car. Le premier auteur a obtenu l'analogue complet du théorème 1 en caractéristique finie [**1**, Theorem 6]. Des généralisations ont alors été données (voir [**7**]). Dans [**3**], un premier analogue du théorème 4 en caractéristique finie est montré :
Soit $q = p^f$ une puissance d'un nombre premier p et Ω le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((1/T))$ pour la valuation $1/T$-adique v normalisée par $v(T) = -1$. Pour tout $z \in \Omega$, on note $\deg(z) = -v(z)$. Soit $r > 0$. On note $\mathbb{D}_r$ le disque fermé de centre r et rayon r, c'est-à-dire

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \Omega \mid \deg z \leq r\}.$$

Définitions 5. —

1. *Une fonction f est dite* analytique sur $\mathbb{D}_r$ *si elle peut s'écrire sous la forme d'une série*
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \textit{avec } a_n \in \Omega \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$
qui converge pour tout $z \in \mathbb{D}_r$.
2. *Une* fonction entière sur Ω *est une fonction analytique sur* Ω.
3. *Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, le* module de croissance de f *(voir* [**6**]*), noté $M(f,r)$, est défini par*
$$M(f,r) = \sup_{\substack{z\in\Omega \\ \deg(z)\leq r}} \{\deg(f(z))\}.$$

On a alors

Théorème 6. — [**3**, Theorem 9] *Soit f une fonction entière sur Ω telle que*

1. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{p}{e\ln q}$ *et*
2. $f^{(\sigma)}(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T]$ *pour tout* $\sigma \in \{0, \cdots, p-1\}$.

Alors, f est un polynôme.

De plus, la borne $\frac{p}{e\ln q}$ est optimale, comme le montre la fonction Ψ^p où

$$\Psi(z) = \sum_{n\geq 0} \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg h<n}} \frac{z-h}{T^n-h}.$$

Remarque 7. — *Ceci est bien un analogue du théorème 4, car pour tout $\sigma \geq p$, on a $f^{(\sigma)} = 0$.*

Ici, nous proposons un deuxième analogue du théorème 4, basé sur une notion de "dérivée" qui préserve à la fois les propriétés analytiques et arithmétiques de la dérivée classique (voir [**4**]). Pour ceci, nous aurons besoin de la notion de dérivée de Hasse.

Définition 8. — [**14**] *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ une fonction entière sur Ω. On appelle n-*ème dérivée de Hasse *et on note $\mathcal{D}^n(f)$ la fonction entière :*

$$\mathcal{D}^n(f)(z) = \sum_{k\geq n} a_k \binom{k}{n} z^{k-n}.$$

Rappelons que l'on a une formule de Leibniz pour les dérivées de Hasse (voir [**14**, Lemma 5.72]) :

Proposition 9. — *Soient $f_1, \cdots, f_r$ des fonctions entières sur Ω et $k \in \mathbb{N}$. On a*

$$\mathcal{D}^k(f_1 \times \cdots \times f_r) = \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{N}^r\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \mathcal{D}^{k_1}(f_1) \times \cdots \times \mathcal{D}^{k_r}(f_r).$$

Remarque 10. — *Supposons qu'il existe une fonction entière sur Ω $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ telle que $\mathcal{D}^k(f)(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{D}^k(f)(0) = a_k \in \mathbb{F}_q[T]$, les a_k sont tous nuls à partir d'un certain rang et f est un polynôme. Pour éviter cet analogue trivial au théorème 4, il est donc nécessaire de définir de meilleurs analogues en caractéristique finie des dérivées successives que les dérivées de Hasse.*

Définition 11. — [**13**, Chapter 9] *Soit $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$. On définit la n-*ième factorielle de Carlitz *$n!_{\mathcal{C}}$ par*

$$n!_{\mathcal{C}} = \prod_{i=0}^{s} \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire}\\ \deg h=i}} h^{n_i}. \tag{1}$$

On définit alors un analogue des opérateurs dérivées successives pour les fonctions entières sur Ω de façon suivante :

Définition 12. — *Soit* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *une fonction entière sur* Ω. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$\delta^{(n)}(f) = n!_{\mathcal{C}}\mathcal{D}^n(f).$$

On dit que f *est une* fonction entière totale *si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\delta^{(n)}(f)(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T]$.

Remarque 13. — *Soit* $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq n < p$. *On a pour toute fonction entière* f

$$\delta^{(n)}(f) = \xi_n f^{(n)} \text{ où } \xi_n \in \mathbb{F}_q^*.$$

Pour analogue du théorème 4, nous obtenons

Théorème 14. — *Soit* f *une fonction entière totale sur* Ω *telle que* $\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{e\ln q}$. *Alors,* f *est un polynôme.*

2. Analogues du théorème de Fridman

Rappelons la construction de l'intégrale de Schnirelmann, qui est l'analogue de l'intégrale de Cauchy pour les corps valués complets non-archimédiens. Soit $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, $u \in \Omega$ avec $\deg(u) = r$ et f une fonction définie sur Ω. Quand elle existe, la quantité

$$\int_r f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\nmid n}} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi\in\Omega \\ \xi^n=1}} f(u\xi)$$

ne dépend pas du choix de l'élément u. Elle est appelée *intégrale de Schnirelmann* de f sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Les propriétés de cette intégrale peuvent être trouvées dans [**5**] ou [**15**]. Citons celles qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 15. — *Soit* $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ *et* f *une fonction analytique sur* $\mathbb{D}_r$.

1. *L'intégrale de Schnirelmann* $\int_r f(z)\mathrm{d}z$ *existe.*
2. *De plus, on a*

$$\deg\left(\int_r f(z)\mathrm{d}z\right) \leq \max_{\substack{z\in\Omega \\ \deg z\leq r}} \{\deg(f(z))\}.$$

3. [*Formule de Cauchy*]. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $w \in \Omega$ *tel que* $\deg w \neq r$. *On a l'égalité*

$$\int_r \frac{zf(z)}{(z-w)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathcal{D}^n(f)(w) & si \ \deg w < r \\ 0 & si \ \deg w > r \end{cases}$$

On commence par donner une majoration triviale de $\deg(n!_{\mathcal{C}})$.

Lemme 16. — *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a* $\deg(n!_{\mathcal{C}}) \leq n\log_q n$.

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$. On a

$$\deg(n!_{\mathcal{C}}) - n\log_q n \leq \sum_{i=0}^{s} n_i(i-s)q^i \leq 0.$$

□

Définition 17. — *Soit f une fonction entière sur Ω et $z_0 \in \Omega$. On appelle* ordre de f en z_0 *le plus grand entier, noté* $\mathrm{ord}_{z_0} f$*, tel que* $f(z)/(z-z_0)^{\mathrm{ord}_{z_0} f}$ *soit aussi une fonction entière sur* Ω.

Remarque 18. — *Il est connu que* $\mathrm{ord}_{z_0} f \geq n$ *si et seulement si* $\mathcal{D}^k(f)(z_0) = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$.

Preuve du théorème 14 : Soit $\tau = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q M(f,r)}{q^r}$. Considérons un réel γ tel que $\tau < \gamma < \frac{1}{e \ln q}$. Il existe $V \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on a

$$M(f,r) \leq q^{\gamma q^r} + V. \tag{2}$$

Pour simplifier, notons $\theta = \frac{1}{\ln q}$. Puisque $\gamma q^\theta - \theta < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $M \geq N$, on ait les inégalités

$$q^{M+1}(\gamma q^\theta - \theta) S_M + (2q^{\frac{M+1}{2}} + 1)V + S_M(4q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + 1) + (M+\theta)(S_M q^{\frac{M+1}{2}} + 1) < 0$$

et

$$(\gamma q^\theta - \theta) S_{M+1} q^{M+1} + 4 S_{M+1} q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + S_{M+1} + (2q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + 1)V + (S_{M+1} q^{\frac{M+1}{2}} + 1)(M+1+\theta) < 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = [q^{\gamma q^{\theta+n}}] + 1$, $H = [q^{(N+1)/2} S_N / \sqrt{N}] + 1$ et $K = \left[2q^{(N+1)/2}\sqrt{N}\right] + 1$.

Etape 1. — *Il existe des éléments $a_{h,k}$ $(0 \leq h < H,\ 0 \leq k < K)$ de $\mathbb{F}_q[T]$ non tous nuls, avec*

$$\max_{\substack{0 \leq h < H \\ 0 \leq k < K}} \{\deg(a_{hk})\} \leq 2 S_N q^{(N+1)/2}\sqrt{N} + 1$$

tels que la fonction entière

$$F(z) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{hk} z^h f(z)^k \tag{3}$$

satisfasse la condition

$$\mathrm{ord}_u F \geq S_N \text{ pour tout } u \in \mathbb{F}_q[T] \text{ tel que } \deg(u) \leq N.$$

Par la remarque 18, pour tout $u \in \mathbb{F}_q[T]$ $(\deg u \leq N)$, on a $\mathrm{ord}_u F \geq S_N$ si et seulement si $\mathcal{D}^\sigma(F)(u) = 0$ pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$ $(0 \leq \sigma < S_N)$. Or par la formule de Leibniz (voir proposition 9), on a pour tout $0 \leq \sigma < S_N$ et tout $u \in \mathbb{F}_q[T]$

$$\mathcal{D}^\sigma(F)(u) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{hk} \sum_{\substack{(x_1,\cdots,x_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1} \\ x_1+\cdots+x_{k+1}=\sigma \\ x_{k+1} \leq h}} \binom{h}{x_{k+1}} u^{h-x_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \mathcal{D}^{x_j}(f)(u).$$

Ainsi F est d'ordre au moins S_N en tout $u \in \mathbb{F}_q[T]$ $(\deg u \leq N)$ si et seulement si les a_{hk} sont solutions d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{F}_q[T]$ de $q^{N+1} S_N$ équations à $HK \geq 2q^{N+1} S_N$ inconnues. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, on a en utilisant l'inégalité (2)

$$\deg(\mathcal{D}^{x_j}(f)(u)) \quad = \quad \deg\left(\int_{N+\varepsilon} \frac{f(z)z}{(z-u)^{x_j+1}} \mathrm{d}z\right) \leq q^{\gamma q^{N+\varepsilon}} + V - (N+\varepsilon)^{x_j}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\deg(\mathcal{D}^{x_j}(f)(u)) \leq q^{\gamma q^N} + V,$$

d'où

$$\begin{aligned}\deg\left(\sum_{\substack{(x_1,\cdots,x_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1}\\ x_1+\cdots+x_{k+1}=\sigma\\ x_{k+1}\leq h}}\binom{h}{x_{k+1}}u^{h-x_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\mathcal{D}^{x_j}(f)(u)\right) &\leq NH + Kq^{\gamma q^N} + KV\\ &\leq 2S_N q^{(N+1)/2}\sqrt{N}.\end{aligned}$$

Le lemme de Siegel montre l'existence des a_{hk} vérifiant les inégalités énoncées (voir [**12**, Lemma 6.12]).

Etape 2. — *Pour tout entier $M > N$, on a pour tout $S_M \leq S \leq S_{M+1}$*

$$(I_{M,S}) \qquad \mathrm{ord}_u F \geq S \text{ pour tout } u \in \mathbb{F}_q[T] \text{ tel que } \deg u \leq M.$$

Posons

$$P_{M,S}(z) = \prod_{\substack{m\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg m\leq M}}(z-m)^S.$$

• On suppose $S_M \leq S < S_{M+1}$. Montrons que $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M,S+1})$.
Soit $u \in \mathbb{F}_q[T]$ tel que $\deg u \leq M$. l'hypothèse de récurrence et la formule de Leibniz donnent

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^S\left(\frac{F(z)}{\prod_{\substack{m\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg m\leq M\\ m\neq u}}(z-m)^S}\right) &= \sum_{s=0}^{S}\mathcal{D}^s(F)(u)\mathcal{D}^{S-s}\left(\frac{1}{\prod_{\substack{m\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg m\leq M\\ m\neq u}}(z-m)^S}\right)(u)\\ &= \mathcal{D}^S(F)(u)\prod_{\substack{\deg m\leq M\\ m\neq u}}(u-m)^{-S}\end{aligned}$$

La formule de Cauchy (voir proposition 15) implique qu'on ait pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $M + \theta + \varepsilon \in \mathbb{Q}$,

$$\int_{M+\theta+\varepsilon}\frac{F(z)z}{(z-u)P_{M,S}(z)}\mathrm{d}z = \mathcal{D}^S(F)(u)\prod_{\substack{\deg m\leq M\\ m\neq u}}(u-m)^{-S}. \tag{4}$$

On a

$$\deg\Big(\prod_{\substack{\deg m\leq M\\ m\neq u}}(u-m)\Big) \leq Mq^{M+1}. \tag{5}$$

De plus, pour tout $z \in \Omega$ tel que $\deg z = M + \theta + \varepsilon$, on a par (2) et (3) :

$$\begin{aligned}
\deg\left(\frac{F(z)z}{(z-u)P_{M,S}(z)}\right) &\leq \max_{\substack{0\leq k\leq K\\0\leq h\leq H}}\{\deg(a_{hk}z^h f(z)^k)\} - S(M+\theta+\varepsilon)q^{M+1}\\
&\leq 2S_N q^{(N+1)/2}\sqrt{N} + Kq^{\gamma q^{M+\theta+\varepsilon}} + KV +\\
&\quad H(M+\varepsilon+\theta) - S(M+\theta+\varepsilon)q^{M+1},
\end{aligned}$$

d'où, en remarquant que $S_N \leq S_M$,

$$\begin{aligned}
\deg\left(\int_{M+\theta+\varepsilon}\frac{F(z)z}{(z-u)P_{M,S}(z)}\mathrm{d}z\right) &\leq 2S_M q^{(M+1)/2}\sqrt{M} + Kq^{\gamma q^{M+\theta+\varepsilon}} + KV +\\
&\quad H(M+\varepsilon+\theta) - S(M+\theta+\varepsilon)q^{M+1}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, utilisant (4) et (5), on obtient

$$\begin{aligned}
\deg(\mathcal{D}^S(F)(u)) &\leq 2S_M q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + (2q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M}+1)S_M + KV +\\
&\quad (S_M q^{\frac{M+1}{2}}+1)(M+\theta) - S(M+\theta)q^{M+1} + SMq^{M+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, grâce au lemme 16,

$$\begin{aligned}
\deg(\delta^{(S)}(F)(u)) &= \deg(S!_{\mathcal{C}}\mathcal{D}^S(F)(u))\\
&\leq S\log_q S + \deg(\mathcal{D}^S(F)(u))\\
&\leq q^{M+1}(\gamma q^\theta - \theta)S_M + (2q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M}+1)V + \qquad (6)\\
&\quad S_M(4q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M}+1) + (M+\theta)(S_M q^{\frac{M+1}{2}}+1). \qquad (7)
\end{aligned}$$

Puisque $M > N$, on a $\deg(\delta^{(S)}(F)(u)) < 0$. De plus, $\delta^{(S)}(F)(u) \in \mathbb{F}_q[T]$, donc on en conclut que $\delta^{(S)}(F)(u) = 0$, soit $\mathcal{D}^S(F)(u) = 0$.

• Montrons que $(I_{M,S_{M+1}}) \Longrightarrow (I_{M+1,S_{M+1}})$. Soit $u \in \mathbb{F}_q[T]$ tel que $\deg u \leq M+1$ et $\sigma \in \{0,\cdots,S_{M+1}\}$. On peut supposer que $\deg u = M+1$ (d'après le cas précédent) et que σ est le plus petit entier tel que la nullité de $\mathcal{D}^\sigma(F)(u)$ n'est pas encore prouvée. De nouveau, par la formule de Cauchy, on a pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $M+1+\theta+\varepsilon \in \mathbb{Q}$,

$$\int_{M+1+\theta+\varepsilon}\frac{F(z)z}{(z-u)^{\sigma+1}P_{M,S_{M+1}}(z)}\mathrm{d}z = \mathcal{D}^\sigma(F)(u)P^{-1}_{M,S_{M+1}}(u). \qquad (8)$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned}
\deg(\mathcal{D}^\sigma(F)(u)) &\leq 2S_{M+1}q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + (2q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M}+1)S_{M+1} + KV +\\
&\quad (S_{M+1}q^{\frac{M+1}{2}}+1)(M+1+\theta) - S_{M+1}(M+1+\theta)q^{M+1} +\\
&\quad S_{M+1}(M+1)q^{M+1}\\
&\leq -S_{M+1}\theta q^{M+1} + 4S_{M+1}q^{\frac{M+1}{2}}\sqrt{M} + S_{M+1} +\\
&\quad (2q^{\frac{M+1}{2}}+1)V + (S_{M+1}q^{\frac{M+1}{2}}+1)(M+1+\theta).
\end{aligned}$$

Reprenant le raisonnement précédent, on peut conclure que $\mathcal{D}^\sigma(F)(u) = 0$.

Etape 3. — *On a pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^\sigma(F)(0) = 0$. Par conséquent, F est nulle et ainsi f est algébrique. Comme f est entière sur Ω, c'est un polynôme (voir* [**18**, Theorem 5]*).*

Remarque 19. — *L'inégalité (5) peut être améliorée en*

$$\deg(\prod_{\substack{\deg m \leq M \\ m \neq u}} (u-m)) \leq Mq^{M+1} - \frac{1}{q-1}q^{M+1} + \frac{q}{q+1},$$

ce qui permet de remplacer le facteur $(\gamma q^\theta - \theta)$ par $\gamma q^\theta - \theta - \frac{1}{q-1}$ dans l'inégalité 7. Cependant, une telle amélioration semble difficile à obtenir dans la seconde partie de la preuve.

Nous construisons maintenant une fonction f entière totale sur Ω non polynomiale telle que $\overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \frac{\log_q M(f,r)}{q^r} \leq \frac{q^{\frac{q}{q-1}}}{e \ln q}$.

Définition 20. — [**13**, Chapter 3] *On appelle* exponentielle de Carlitz *et on note* $\exp_{\mathcal{C}}$ *la fonction entière sur Ω définie par*

$$\exp_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{q^n}}{q^n!_{\mathcal{C}}}.$$

Soit $\mathcal{W}_{\mathbb{F}_q[T]}$ la fonction de Weierstrass associée au réseau $\mathbb{F}_q[T]$:

$$\mathcal{W}_{\mathbb{F}_q[T]}(z) = z \prod_{a \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{a}\right).$$

Il est bien connu (voir [**13**, Theorem 3.2.8]) que

$$\mathcal{W}_{\mathbb{F}_q[T]}(z) = \frac{1}{\xi} \exp_{\mathcal{C}}(\xi z), \tag{9}$$

avec

$$\xi = \sqrt[q-1]{T - T^q} \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{T^{q^j} - T}{T^{q^{j+1}} - T}\right).$$

Clairement, on a $\deg \xi = \frac{q}{q-1}$. Comme $\xi^{q-1} \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$, on peut définir par récurrence une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{F}_q(T)$ de manière suivante : Supposons avoir construit $b_0, \cdots, b_{l-1}$. Considérons $H \in \mathbb{F}_q[T]$ tel que

$$0 \leq \deg \left(H - q^l!_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\xi^{q^l - q^j}}{q^{l-j}!_{\mathcal{C}}{}^{q^j}} b_j\right) \leq 1.$$

On pose alors

$$b_l = \frac{1}{q^l!_{\mathcal{C}}} H - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\xi^{q^l - q^j}}{q^{l-j}!_{\mathcal{C}}{}^{q^j}} b_j.$$

Comme pour tout $l \in \mathbb{N}$, $-lq^l \leq \deg(b_l) \leq 1 - lq^l$, la fonction

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} b_n \mathcal{W}_{\mathbb{F}_q[T]}^{q^n}(z)$$

est entière sur Ω et $\mathbb{F}_q$-linéaire. Evidemment, on a $f(\mathbb{F}_q[T]) = \{0\}$. Comme f est $\mathbb{F}_q$-linéaire, on a pour tout $n \neq q^l$ $(l \in \mathbb{N})$ $\delta^n(f) = 0$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta^{q^l}(f) = q^l!_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{l} \frac{\xi^{q^l - q^j}}{q^{l-j}!_{\mathcal{C}}{}^{q^j}} b_j \in \mathbb{F}_q[T],$$

par construction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, f est une fonction entière totale. Majorons maintenant son type. Notons $g(z)$ la fonction entière $g(z) := \sum_{n \geq 0} b_n z^{q^n}$. On a

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(g,r)}{q^r} \leq \frac{1}{e \ln q}.$$

Comme $\deg(\xi) = \frac{q}{q-1}$ et que $\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(\exp_{\mathcal{C}},r)}{q^r} = \frac{1}{e\ln q}$ (voir [**16**, Chapter 2]), on déduit de l'égalité (9) que

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(\mathcal{W}_{\mathbb{F}_q[T]},r)}{q^r} = \frac{q^{\frac{q}{q-1}}}{e \ln q}.$$

On obtient ainsi que

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q M(f,r)}{q^r} \leq \frac{q^{\frac{q}{q-1}}}{e \ln q}.$$

De plus, comme pour tout $l \in \mathbb{N}$, $b_l \neq 0$, f n'est pas polynomiale.

Remarque 21. — *A chaque étape, il y a au moins deux choix possibles pour H. Cette construction montre que l'ensemble des fonctions entières totales non-polynomiales de type $\leq \frac{q^{\frac{q}{q-1}}}{e\ln q}$ n'est pas dénombrable.*

Les preuves des résultats suivants étant presque identiques à celle du théorème 14, nous ne les donnons pas en détail.
Il est classique de considérer l'ensemble $\mathbb{F}_q[T]_+$ des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_q[T]$ comme étant un analogue de $\mathbb{N}$. Comme analogue du théorème 3, on a le

Théorème 22. — *Soit f une fonction entière sur Ω telle que*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\delta^{(n)}(f)(\mathbb{F}_q[T]_+) \subset \mathbb{F}_q[T]$ et*
2. $\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{(q-1)e\ln q}$.

Alors, f est un polynôme.

3. H-analogues

Dans la suite H désigne un polynôme de degré $h \geq 1$.

3.1. H-analogue arithmétique. — En caractéristique finie, il existe deux sortes de H-analogues. La plus naturelle consiste à considérer la suite $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir [**1**]). Comme H-analogue du théorème 14, on a

Théorème 23. — *Soit H un polynôme de degré $h \geq 1$. Une fonction entière f sur Ω telle que*

1. $\delta^{(n)}(f)(H^m) \in \mathbb{F}_q[T]$ *pour tout* $m, n \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(f,r))}{r^2} < \frac{1}{4h}$

est un polynôme.

Adaptant mot pour mot la preuve de [**19**] (et celle du corrigendum [**20**]), on peut montrer qu'il existe une infinité non-dénombrable de fonctions entières f telles que $\delta^{(n)}(f)(H^m) \in \mathbb{F}_q[T]$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(f,r))}{r^2} \leq \frac{1}{2h}$.

3.2. H-analogue géométrique. — Dans [**1**], nous avons défini un H-analogue géométrique du théorème 6. Nous faisons de même pour le théorème 14. Soit $\mathcal{C}$ le *module de Carliz*, c'est-à-dire le $\mathbb{F}_q$-morphisme injectif défini par

$$C: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q[T] & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{G}_a(\Omega)) \\ T & \longrightarrow & TX + X^q \end{array}.$$

Classiquement, on note C_a la valeur du module de Carlitz en $a \in \mathbb{F}_q[T]$ au lieu de $C(a)$. De manière plus explicite, on a pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$

$$C_a(X) = \sum_{j=0}^{\deg a} \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T] \\ \deg h<j}} \frac{a-h}{T^j-h} X^{q^j}.$$

Rappelons que pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]\setminus\{0\}$, $\deg(C_a(H)) = q^{\deg a}$ (voir [**2**, Théorème 6]). On a

Théorème 24. — *Soit $H \in \mathbb{F}_q[T]$ de degré $h \geq 1$ tel que $q^h \geq 3$. Une fonction entière f sur Ω telle que*

1. $\delta^{(n)}(f)(C_a(H)) \in \mathbb{F}_q[T]$ *pour tout* $(n,a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{F}_q[T]$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(f,r))}{r^2} < \frac{1}{4h}$

est un polynôme.

Soit W la fonction entière de Weierstrass associée à $\{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$, c'est-à-dire

$$W(z) = z \prod_{a\in\mathbb{F}_q[T]\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{C_a(H)}\right).$$

Lemme 25. — *La fonction W est $\mathbb{F}_q$-linéaire et on a* $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(W,r)}{r^2} = \frac{q+1}{4h}$.

Démonstration. — Comme les zéros de W sont simples et forment un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel, W est une fonction $\mathbb{F}_q$-linéaire.
Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Ecrivons $r = q^{r_0+\varepsilon}h$ avec $r_0 \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \varepsilon < 1$. On a pour tout $z \in \Omega$ ($\deg z = r$),

$$\begin{aligned}\deg(W(z)) &\leq \sum_{\substack{a \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg a \leq r_0}} (q^{r_0+\varepsilon}h - \deg(C_a(H))) \\ &\leq \sum_{j=0}^{r_0} (q-1)q^j(q^{r0+\varepsilon}h - q^j h) \\ &= \frac{h(q^{2+\varepsilon}+q^{1+\varepsilon}-q^2)}{q+1} q^{2r_0} + o(q^{2r_0}).\end{aligned}$$

Comme $\max_{0\leq\varepsilon<1}\left\{\frac{q^{2+\varepsilon}+q^{1+\varepsilon}-q^2}{(q+1)q^{2\varepsilon}h}\right\} = \frac{q+1}{4h}$, on a

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(W,r)}{r^2} \leq \frac{q+1}{4h}.$$

En considérant une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω telle que $\deg z_n = \frac{2h}{q+1}q^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(W,r)}{r^2} = \frac{q+1}{4h}.$$

□

Adaptant la preuve de la section 2, on peut alors montrer qu'il existe une infinité non dénombrable de fonctions entières f telles que $\delta^{(n)}f(C_a(H)) \in \mathbb{F}_q[T]$ pour tout $(n,a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{F}_q[T]$ et $\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(f,r))}{r^2} \leq \frac{q+1}{4h}$.

4. Extensions finies totalement imaginaires de $\mathbb{F}_q(T)$.

Soit $K/\mathbb{F}_q(T)$ une extension géométrique finie de degré d totalement imaginaire, c'est-à-dire telle que le corps des constantes de K soit $\mathbb{F}_q$ et que la place $\left(\frac{1}{T}\right)$ de $\mathbb{F}_q[T]$ ne se decompose pas dans K. Notons g_K le genre de K. La clôture intégrale $\mathcal{O}_K$ de $\mathbb{F}_q[T]$ dans K est un $\mathbb{F}_q[T]$-réseau de dimension d. Rappelons (voir [**23**, Preuve du Theorem 3.2]) le

Lemme 26. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $nd \geq 2g_K - 1$, on a*

$$\mathrm{Card}\,\{x \in \mathcal{O}_K \mid \deg(x) \leq n\} = q^{nd-g_K+1}.$$

Grâce à ce lemme, on peut montrer le

Théorème 27. — *Soit f une fonction entière sur Ω telle que*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta^{(n)}(f)(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K$ et*
2. $\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(f,r))}{q^{dr}} < \dfrac{1}{dq^{d+g_K-1}}\dfrac{1}{e\ln q}$.

Alors, f est un polynôme.

Démonstration. — Il suffit d'adapter la preuve du théorème 14 en prenant $S_N = \left[q^{\gamma q^{d(N+\theta)}}\right] + 1$. $\square$

Remarque 28. — *En prenant $K = \mathbb{F}_q(T)$, on retrouve le théorème 14.*

Dans [**10**], Denis montre que la fonction de Weierstrass associée au réseau $\mathcal{O}_K$

$$W_{\mathcal{O}_K}(z) = z \prod_{a \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}} (1 - \frac{z}{a})$$

est entière sur Ω, $\mathbb{F}_q$-linéaire et que $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(W_{\mathcal{O}_K}, r)}{q^{dr}} = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Comme dans la section 2, on peut alors construire une fonction g entière sur Ω non polynomiale telle que $\delta^{(n)}(g)(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\log_q(M(g,r))}{q^{dr}} \leq \alpha$.

5. Une conjecture

En caractéristique finie, la borne optimale pour l'analogue du théorème de Pólya est connue dans les trois cas $\mathbb{F}_q[T]$, $\{H^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{C_a(H) \mid a \in \mathbb{F}_q[T]\}$ (voir [**1**] pour les deux premiers cas et [**2**] pour le troisième). On remarque que les bornes optimales des analogues des théorèmes de Pólya sont les mêmes que celles obtenues dans les analogues du théorème de Fridman. Ceci nous amène à oser conjecturer les bornes optimales pour les analogues du théorème de Pólya suivants :

Ensemble	borne optimale conjecturée
$\mathbb{F}_q[T]_+$	$\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{(q-1)e\ln q}$
$\mathcal{O}_K$	$\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{q^{dr}} < \frac{1}{dq^{d-1+g_K}} \frac{1}{e\ln q}$

Dans le cas des anneaux d'entiers d'extensions quadratiques imaginaires, Car (voir [**7**]) utilisant une méthode d'interpolation et de minoration de PPCM dans $\mathcal{O}_K$ (voir [**8**]) a montré les

Théorème 29. — [**7**, Theorem 6] *Soit q une puissance d'un nombre premier impair, $D \in \mathbb{F}_q[T]$ de degré $2g+1$ ($g \in \mathbb{N}$) de discriminant non-nul et $K = \mathbb{F}_q(T)[\sqrt{D}]$. Soit f une fonction entière sur Ω telle*

1. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{q^{2r}} < \frac{1}{2e\ln q\, q^{g+\frac{q+1}{q-1}+\frac{3q^{2g+1}}{2(q-1)}}}$ *et*
2. $f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K$.

Alors, f est un polynôme.

et

Théorème 30. — [**7**, Theorem 6] *Soit q une puissance d'un nombre premier impair, $D \in \mathbb{F}_q[T]$ de degré $2g+2$ ($g \in \mathbb{N}$) de discriminant non-nul avec $\mathrm{sgn}(D) \notin \mathbb{F}_q^2$ et $K = \mathbb{F}_q(T)[\sqrt{D}]$. Soit f une fonction entière sur Ω telle*

1. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{M(f,r)}{q^{2r}} < \frac{1}{2e\ln q\, q^{g+1+\frac{2(q^2+1)}{(q^2-1)}+\frac{5q^{2g+3}}{2(q-1)}}}$ *et*

2. $f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K$.

Alors, f est un polynôme.

Le corps K defini dans les théorème 29 et 30 est une extension imaginaire quadratique du corps $\mathbb{F}_q(T)$ de genre g. On remarque que la borne obtenue par Car dans les deux cas est strictement inférieure à celle conjecturée.

Références

[1] D. Adam, *Car-Pólya and Gel'fond's theorems for $\mathbb{F}_q[T]$*, Acta. Arith. **115.3** (2004), 287–303.

[2] D. Adam, *Fonctions à valeurs entières et module de Carlitz*, J. théor. nombres Bordeaux, **22.2** (2010), 271–286.

[3] D. Adam, *Gel'fond-Fridman theorem in positive characteristic*, Isr. J. of Math, **185.1** (2011), 235–251.

[4] D. Adam, *Polynômes à valeurs entières ainsi que leurs dérivées en caractéristique p*, Acta. Arith, **148.1** (2011), 351–365.

[5] W. Adams, *Transcendental numbers in the P-adic domain*, Amer. J. Math. **88** (1966), 279–308.

[6] M. Car, *Pólya's theorem for $\mathbb{F}_q[T]$*, J. Number Theory **66** (1997), 148–171.

[7] M. Car, *Gelfond-Gramain's theorem for function fields*, Finite fields and applications (Augsburg, 1999), Springer, Berlin, (2001), 70–80.

[8] M. Car, *Waring's problem in function fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **68** (1994), 1–30.

[9] L. Delamette, *Théorème de Pólya en caractéristique finie*, Acta Arith. **106.2** (2003), 159–170.

[10] L. Denis, *communication privée.*

[11] G.A. Fridman, *Entire integer-valued functions*, Mat. Sb. (N.S.) **75** (117) (1968), 417–431.

[12] J.M. Geijsel, *Transcendence in fields of positive characteristic*, Mathematical centre tracts **91**.

[13] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **35**, Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[14] J.W.P Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, *Algebraic curves over a finite field*, Princeton series in applied mathematics, (2008).

[15] N. Koblitz, *p-adic analysis : a short course on recent work*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **46**, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

[16] A. Kochubei, *Analysis in positive characteristic*, Cambridge tracts in Math. **178**, Cambridge University Press (2009).

[17] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Math. Palermo **40** (1915), 1–16.

[18] L.I. Wade, *Remarks on the Carlitz ψ functions*, Duke Math. J. **13** (1946), 71–78.

[19] M. Welter, *On entire functions whose derivatives are integer-valued on geometric progressions*, Manuscripta Math. **103.1** (2000), 63–74.

[20] M. Welter, *Erratum : "On entire functions whose derivatives are integer-valued on geometric progressions"*, Manuscripta Math. **110.4** (2003), 409–411

[21] M. Welter, *A new class of integer-valued entire functions*, J. Reine Angew. Math. **583** (2005), 175–192.

[22] M. Welter, *Thèse*.

[23] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. **52.2** (1985), 517–527.

---

20 septembre 2012

David ADAM • *E-mail :* `david.adam@upf.pf`, GAATI, Université de la Polynésie française, BP 6570, 98702 Faa'a, Tahiti, Polynésie française

Michael WELTER • *E-mail :* `welter@math.uni-bonn.de`, Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Deutschland